اختبار الثلاثي الثالث في مادة الرياضيات — المـدة:04 ساعـات

## التمرين الاول :(04 نقاط)

I. $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ و من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. أ) احسب $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فان : $u_n = 2^n - 1$

2. $(v_n)$ و $(w_n)$ المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$ : $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$

أ) بين أن المتتالية $(w_n)$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها $q$

ب) احسب بدلالة $n$ ، $S_n$ و $S'_n$ و $S''_n$

حيث : $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ ، $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S''_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ فان جميع حدود المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ من $\mathbb{N}$

1. عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين $u_n$ و $v_n$

2. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 3

ب) عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق: $v_n \equiv 0[3]$

ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ التي تجعل الحدين $u_n$ و $v_n$ أوليين فيما بينهما

3. بين انه من اجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ فان $S''_n \equiv S'_n [3]$






## التمرين الثاني : (04 نقاط)

يعرض متجر تخفيضات هامة أثناء بيع جزء من مدخراته لقطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع من السلع $x$ ، $y$ ، $z$ ، تمثل السلعة $x$ ربع المدخرات بينما تمثل $y$ ثلثها و تمثل $z$ الباقي ، 40% من السلعة $x$ و 75% من السلعة $y$ و 24% من السلعة $z$ كلها مخفضة الثمن . أخذ زبون قطعة عشوائيا.

لتكن الاحداث التالية:

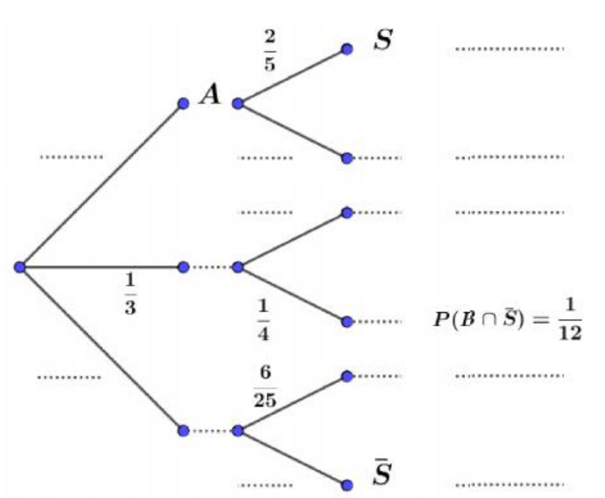
$A$ : " الحادثة اخذ الزبون القطعة من السلعة $x$ "

$B$ : " الحادثة اخذ الزبون القطعة من السلعة $y$ "

$C$ : " الحادثة اخذ الزبون القطعة من السلعة $z$ "

$S$ : " الحادثة القطعة التي أخذها الزبون مخفضة الثمن"

$\overline{S}$ : " الحادثة القطعة التي أخذها الزبون غير مخفضة الثمن"




1. انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة , ثم أكملها .

2. احسب $P(S)$ احتمال أن تحقق الحادثة $S$

3. احسب $P(\overline{S})$ احتمال أن تحقق الحادثة $\overline{S}$

## التمرين الثالث :(05 نقاط)

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $(z + 2 - 3i)(z^2 - 2z + 10)$

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ التي لاحقاتها $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ على الترتيب ، حيث: $z_A = -2+3i$ ، $z_B = 1-3i$ ، $z_C = \overline{z_B}$ .

1. أ) اكتب على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الاسي العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

ب) اوجد طبيعة التحويل النقطي $T$ الذي يحول النقطة $A$ الى النقطة $B$ مع تحديد عناصره المميزة.

ج) استنتج طبيعة المثلث $ABC$

د) بين ان النقاط $A$ ، $B$ ، $C$ تقع على دائرة $(\mathcal{C})$ ، يطلب تحديد مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $r$

2. $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة $z = x+iy$ التي تحقق $\left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right| = 1$

أ) عين ثم انشئ المجموعة $(\Gamma)$.

ب) عين ثم انشئ صورة المجموعة $(\Gamma)$ بالتحويل النقطي $T$ .

3. أ) عين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ ، بحيث تكون النقطة $C$ مرجح للجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$

ب) بين ان النقطة $D$ هي نظيرة النقطة $C$ بالنسبة الى النقطة $\Omega$ .

ج) عين بدقة طبيعة الرباعي $ADCB$

**التمرين الرابع : (07 نقاط)**

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجموعة $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$(C_f)$: التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 1cm$

I.

1. احسب نهايات الدالة $f$ عند اطراف مجموعة تعريفها.

2. أ) اثبت أن المستقيم $(\mathcal{D})$ ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ هو مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ عند $-\infty$ و $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\mathcal{D})$.

3. أ) بين انه من اجل كل $x$ من المجموعة $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجموعة $]-\infty\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$

4. أنشئ $(C_f)$ و المستقيمات المقاربة في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

II.

1. $\lambda$ عدد حقيقي ، بين ان الدالة $x \mapsto (x-\lambda)\ln(x-\lambda) - x$ دالة اصلية للدالة $\ln(x-\lambda)$ على المجال $]0;+\infty[$

2. $\alpha$ عدد حقيقي حيث $\alpha > 2$ ، احسب بـ $cm^2$ المساحة $\mathcal{A}(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بـ $(C_f)$ ، $(\mathcal{D})$ و المستقيمين ذي المعادلتين $x = 2$ ، $x = \alpha$

3. احسب $\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$

**بالتـــوفيـــق**

**تصحيح**

المتتاليات العددية + الحساب

**التمرين الاول**

**.I**

**.1**

أ) حساب الحدود $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ :

$u_1 = 1$ ، $u_2 = 3$ ، $u_3 = 7$

ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 2^n - 1$ :

نبرهن بالتراجع على الخاصية $P(n)$ ( $P(n)$ : من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 2^n - 1$ )

المرحلة الأولى : من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ الخاصية $P(0)$ صحيحة

المرحلة الثانية :ليكن $k$ عدد طبيعي كيفي

لنفترض أن الخاصية $P(k)$ صحيحة أي أن $u_k = 2^k - 1$ ، ونبرهن صحة الخاصية $P(k+1)$

لدينا : $u_{k+1} = 2u_k + 1$ ومنه: $u_{k+1} = 2\left(2^k - 1\right) + 1$ ومنه : $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

وبالتالي فان الخاصية $P(k+1)$ صحيحة

إذن : من أجل كل عدد طبيعي $n$ فان $u_n = 2^n - 1$

**.2**

أ) تبيين أن المتتالية $(w_n)$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها $q$ :

لدينا : $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$

ومنه المتتالية $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$

ب) حساب بدلالة $n$ ، $S_n$ ، $S'_n$ و $S''_n$ :

$S_n = 2^{n+1} - 1$ ، $S'_n = 2^{n+1} + 2n + 1$ ، $S''_n = 2^{n+1} - (n+2)$

**.II**

1. تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين $u_n$ و $u_n$ :

ليكن $p\gcd(u_n ; v_n) = d$ ومنه : $d / u_n$ و $d / v_n$ ومنه : $d / v_n - u_n$ ومنه : $d / 3$

وبالتالي القيم الممكنة لـ : $d \in D_3 = \{1 ; 3\}$

**.2**

أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 3:

| $n$ | $2k$ | $2k+1$ |
| --- | --- | --- |
| بواقي قسمة $2^n$ على 3 | 1 | 2 |

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق $v_n \equiv 0[3]$ :

لدينا : $v_n \equiv 0[3]$ معناه أن : $2^n \equiv -2[3]$ وبما أن: $-2 \equiv 1[3]$ إذن : $2^n \equiv 1[3]$

وبالتالي نجد : $n = 2k$ ; $k \in$

ج) استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ التي تجعل $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$ :

نعلم أن $v_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k$ ; $k \in$ وكذلك نجد أن : $u_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k'$ ; $k' \in$

أي في هذه الحالة نجد : $p\gcd(u_n ; v_n) = 3$ لكن القيم الممكنة لـ $d$ هي : 3 او 1 إذن حتى

يكون $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$ يجب أن يكون $n = 2m + 1$ ; $m \in$

3. تبيين انه من اجل كل من $n$ فان $S''_n \equiv S'[3]$ :

لدينا : $S''_n - S' = 3(n+1)$ تكافئ أن : $S''_n - S' = 0[3]$ تكافئ أن : $S''_n \equiv S'[3]$

## التمرين الثاني

1. اكمال شجرة الاحتمالات:

- $A$ : $\frac{1}{4}$
  - $S$ : $\frac{2}{5}$ ، $P(A\cap S)=\frac{1}{10}$
  - $\bar{S}$ : $\frac{3}{5}$ ، $P(A\cap \bar{S})=\frac{3}{20}$
- $B$ : $\frac{1}{3}$
  - $S$ : $\frac{3}{4}$ ، $P(B\cap S)=\frac{1}{4}$
  - $\bar{S}$ : $\frac{1}{4}$ ، $P(B\cap \bar{S})=\frac{1}{12}$
- $C$ : $\frac{5}{12}$
  - $S$ : $\frac{6}{25}$ ، $P(C\cap S)=\frac{1}{10}$
  - $\bar{S}$ : $\frac{18}{25}$ ، $P(C\cap \bar{S})=\frac{9}{30}$

2. حساب $P(S)$ احتمال تحقق الحادثة $S$ :

$$P(S)=P\left(A\cap S\right)+P\left(B\cap S\right)+P\left(C\cap S\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{9}{20}$$

3. حساب $P(\overline{S})$ احتمال تحقق الحادثة $\overline{S}$ :

$$P(\overline{S})=P\left(A\cap\overline{S}\right)+P\left(B\cap\overline{S}\right)+P\left(C\cap\overline{S}\right)=\frac{3}{20}+\frac{1}{12}+\frac{9}{30}=\frac{8}{15}$$

الاحتمالات

**التمرين الثالث :** ........................................................................................

.I

حل في    المعادلة ذات المجهول $z$ التالية: $\left(z+2-3i\right)\left(z^2-2z+10\right)=0$

$\left(z-+2-3i\right)\left(z^2-2z+10\right)=0$ تكافئ $z=-2+3i$ او $z^2-2z+10=0$

لنحل المعادلة $z^2-2z+10=0$ :

لدينا $\Delta=-36=\left(6i\right)^2$ ومنه $z_1=\dfrac{2-6i}{2}$ , $z_2=\dfrac{2+6i}{2}$

أي : $z_1=1-3i$ , $z_2=1+3i$

وبالتالي نجد :

$\left(z-+2-3i\right)\left(z^2-2z+10\right)=0$ تكافئ $z\in\left\{-2+3i;1-3i;1+3i\right\}$

.II

**1.** أ) كتابة الشكل الجبري ، والشكل الاسي للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ :

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1-3i-1-3i}{-2+3i-1-3i}=\frac{-6i}{-3}=2i$$

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{®}{2}}$$

ب) ايجاد طبيعة التحويل النقطي $T$ مع ذكر عناصره المميزة:

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{®}{2}}$ تكافئ $z_B-z_C=2e^{i\frac{®}{2}}\left(z_A-z_C\right)$

ومنه التحويل النقطي هو تشابه مباشر مركزه النقطة $C$ و نسبته $2$ و زاويته $\dfrac{®}{2}$

ج) استنتاج طبيعة المثلث $ABC$ :

لدينا : $z_B-z_C=2e^{i\frac{®}{2}}\left(z_A-z_C\right)$ معناه : $\left|z_B-z_C\right|=2\left|z_A-z_C\right|$

معناه : $CB=2CA$

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{®}{2}}$ معناه: $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\dfrac{®}{2}+k\times2®\ ,k\in$

معناه : $\left(\overrightarrow{CA}\ ,\ \overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{®}{2}+k\times2®\quad ,\ k\in$

وبالتالي نجد ان المثلث $ABC$ مثلث قائم في النقطة $C$

د) تبيين ان النقاط $A$ ، $B$ ، $C$ تقع على دائرة $(\Gamma)$ مع تحديد مركزها النقطة $\Omega$ ونصف قطرها $r$ :

بما ان المثلث $ABC$ قائم في النقطة $C$ فان النقاط $A$ ، $B$ ، $C$ تقع على دائرة $(\Gamma)$ قطرها هو وتر للمثلث $ABC$ أي ان القطعة $[AB]$ هي قطر للدائرة $(\Gamma)$ وبالتالي فان النقطة $\Omega$ هي منتصف القطعة $[AB]$

لتكن $z_\Omega$ لاحقة النقطة $\Omega$ لدينا : $z_\Omega=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{-2+3i+1-3i}{2}=-\dfrac{1}{2}$

اذن $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ و $r=\dfrac{\left|z_B-z_A\right|}{2}=\dfrac{\left|1-3i+2-3i\right|}{2}=\dfrac{\left|3-6i\right|}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}u.m$

**2.** ا) تعيين وانشاء المجموعة النقط $(\Delta)$ :

$\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_{\overline{C}}}\right|=1$ تكافئ $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$ تكافئ $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$

معناه ان $AM = BM$

أي مجموعة النقط هي عبارة عن محور القطعة $[AB]$

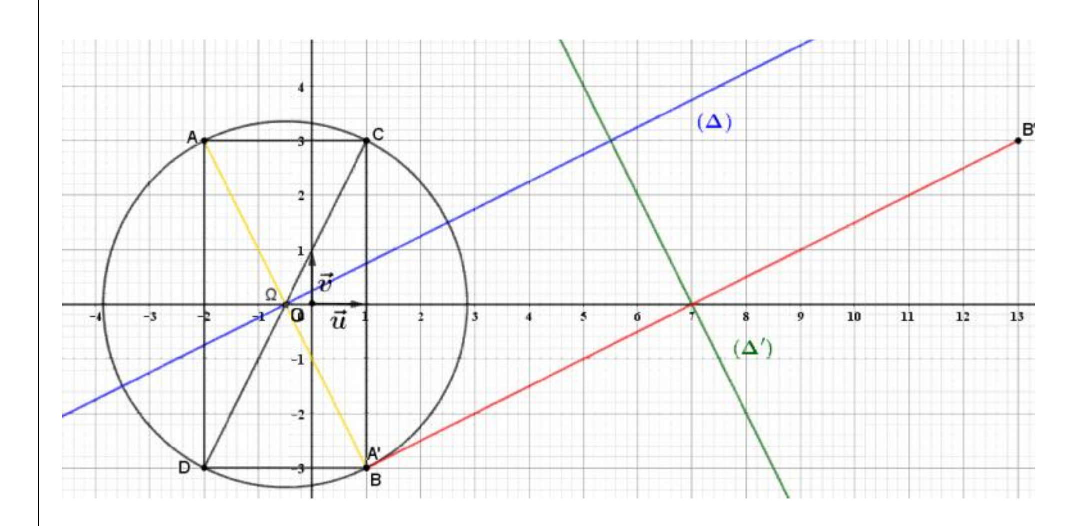
ب) تعيين وانشاء صورة المجموعة النقط $(\Delta)$ بالتحويل النقطي $T$:

لتكن النقط $A'$، $B'$ و $M'$ حيث : $T(A) = A'$ ، $T(B) = B'$ و $T(M) = M'$

بما ان التحويل النقطي $T$ هو تشابه مباشر فان : $\frac{B'M'}{BM} = \frac{A'M'}{AM}$ ومنه: $\frac{BM}{AM} = \frac{B'M'}{A'M'}$

أي : $\frac{B'M'}{A'M'} = 1$ وبالتالي نجد : $A'M' = B'M'$

اي صورة مجموعة النقط $[AB]$ عبارة عن محور القطعة $[A'B']$




**.3** أ) تعيين لاحقة النقطة $D$:

النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$ معناه :

$z_C = \frac{z_A + z_B - z_D}{1+1-1} = z_A + z_B - z_D$ ومنه: $z_D = z_A + z_B - z_C$

أي : $z_D = -2+3i+1-3i-1-3i = -2-3i$

ب) تبيين ان النقطة $D$ نظيرة النقطة $C$ بالنسبة للنقطة $\Omega$:

النقطة $D$ نظيرة النقطة $C$ بالنسبة للنقطة $\Omega$ معناه ان النقطة $\Omega$ منتصف القطعة $[CD]$

لدينا : $z_\Omega = -\frac{1}{2} = \frac{1+3i-2-3i}{2} = \frac{z_C + z_D}{2}$

اذن: النقطة $D$ نظيرة النقطة $C$ بالنسبة للنقطة $\Omega$

ج) تعيين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$ :

بما ان القطعتيين $[AB]$، $[CD]$ قطرا الرباعي $ADBC$ و كذلك قطرا للدائرة $(\Gamma)$، و النقطتيين $C$ ، $D$ لا تنتميان الى $(\Delta)$ محور القطعة $[AB]$ لان $|z_C - z_A| \neq |z_C - z_B|$ و $|z_D - z_A| \neq |z_D - z_B|$

فان القطران $[AB]$، $[CD]$ متنصفان و متقايسان و غير متعامدان اذن الرباعي $ADBC$ مستطيل.

**التمرين الرابع :**

**I.**

1. حساب نهايات الدالة عند اطراف مجموعة التعريف :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. ا) بين أن المستقيم $(\mathscr{D})$ ذو المعادلة مستقيم $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$ ، $+\infty$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=0 \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=0$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين $\left(C_f\right)$ و $(\mathscr{D})$ :

لدينا من اجل كل $x$ من $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ ، $f(x)-\frac{1}{2}x=-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$f(x)-\frac{1}{2}x=0$ يكافئ $-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=0$ يكافئ $\frac{x-1}{x}=1$ معناه $x-1=x$ أي $-1=1$

و هذا تناقض ، اذن من اجل كل $x$ من $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ فان $\left(C_f\right)$ لايقطع $(\mathscr{D})$

$f(x)-\frac{1}{2}x<0$ يكافئ $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)>0$ $\frac{x-1}{x}>1$ يكافئ $\frac{x-1}{x}-1>0$

يكافئ $\frac{-1}{x}>0$ يكافئ $-x>0$ يكافئ $x<0$

اذن من اجل كل $x$ من $]-\infty\,;0[$ فان $\left(C_f\right)$ يقع تحت $(\mathscr{D})$

$f(x)-\frac{1}{2}x>0$ يكافئ $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)<0$ يكافئ $\frac{x-1}{x}<1$ يكافئ $\frac{x-1}{x}-1<0$

يكافئ $\frac{-1}{x}<0$ يكافئ $-x<0$ يكافئ $x>0$

اذن من اجل كل $x$ من $]1\,;+\infty[$ فان $\left(C_f\right)$ يقع فوق $(\mathscr{D})$

اذن $\left(C_f\right)$ يقع تحت $(\Delta)$

3. أ) تبيين من اجل كل $x$ من $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$ :

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)'=\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على المجموعة $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ ، مع تشكيل جدول تغيراتها:

تشكيل جدول اشارة $f'(x)$

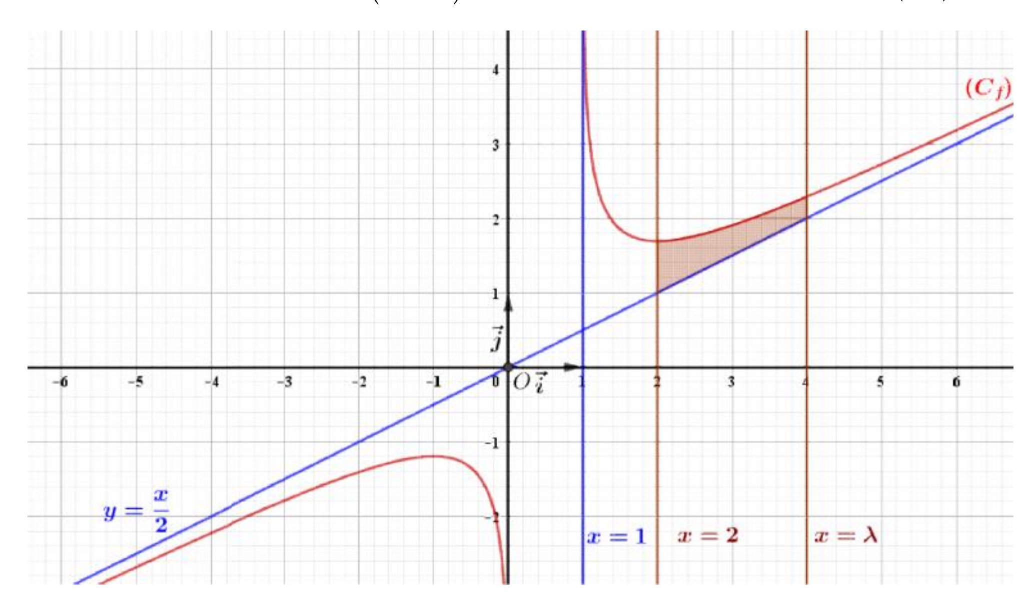
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x(x-1)$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | ////// | | $-$ | $0$ | $+$ | |

ومنه الدالة متزايدة تماما عاى كل من المجالين $]-\infty\,;-1]$ و $[2\,;+\infty[$ ، و متناقصة تماما على كل من المجالين $[-1\,;0[$ و $]1\,;2]$

تشكيل جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | ////// | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1+\ln 2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ | ////// | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{2}-\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |

4. إنشاء $(C_f)$ و المستقيمات المقاربة $(\Delta)$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$:




**.II**

1. $a\in$ ، تبيين ان الدالة $x\mapsto(x-a)\ln(x-a)-x$ دالة الاصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-a)$ على المجال $]a\,;+\infty[$ :

من اجل كل من المجال $]a\,;+\infty[$ نضع : $H(x)=(x-a)\ln(x-a)-x$ و $h(x)=\ln(x-a)$

الدالة $H$ قابلة للاشتقاق على المجال $]a\,;+\infty[$ و

$$H'(x)=(x-a)\frac{1}{x-a}+\ln(x-a)-1=1+\ln(x-a)-1=\ln(x-a)=h(x)$$

ومنه الدالة $H$ هي دالة اصلية للدالة $h$ على المجال $]a\,;+\infty[$ .

2. حساب $\mathcal{A}(\alpha)$:

$$A(\alpha)=1\times1\int_2^{\alpha}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx=\int_2^{\alpha}-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx=\int_2^{\alpha}(\ln x-\ln(x-1))\,dx$$

$$A(\alpha)=\left[x\ln x-x-(x-1)\ln(x-1)+x\right]_2^{\alpha}=\alpha\ln\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)-2\ln 2\,cm^2$$

3. حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$ :

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha\ln\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)-2\ln 2=+\infty$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

اختبار الباكالوريا التجريبي — دورة : ماي 2013

الشعبة : رياضيات + تقني رياضي — ثانوية بلحاج قاسم نور الدين

---

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04ساعات ونصف

---

**على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول :(04 نقاط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ تعطى النقط $A(1,2,2)$ ، $B(-1,0,1)$ ، $C(3,2,1)$

1. بين أن المستوي (Q) الذي يشمل النقط A ، B ، C معادلته : $x - 2y + 2z - 1 = 0$
2. (P) مستو معادلته $z = 1$.
   ا) تحقق أن المستقيم $(BC)$ محتوى في المستوي (P).
   ب) استنتج تقاطع المستويين (P) و (Q)
   جـ) عين تمثيلاً وسيطيا للمستقيم (BC).
3. اثبت أن النقطة H(1,2,1) هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).
   هل المستقيمان (BC) و (AH) متقاطعان ؟ برر إجابتك .
4. $G$ مرجح الجملة المثقلة $\left\{(A,1),(B,1),(C,-1)\right\}$.
   أ) عين إحداثيات النقطة G .
   ب) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

### التمرين الثاني :(05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B حيث :

$$z_B=\sqrt{3}-i \quad , \quad z_A=\sqrt{3}+i$$

1. اكتب العددين $z_B , z_A$ على الشكل الأسي ، ثم أنشئ النقطتين A و B .
2. $r$ دوران مركزه O ، وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
   - عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران $r$ .
   - اكتب $z_{A'}$ على الشكل الجبري ، ثم أنشئ النقطة A' .
3. h تحاك مركزه O ، ونسبته $\frac{-3}{2}$.
   - اكتب على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h ، ثم أنشئ النقطة B' .
4. μ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OA'B' ، و R نصف قطرها و $z_\mu$ لاحقة النقطة μ.
   ا) باستعمال الخاصة : $z\bar{z}=|z|^2$ تحقق من صحة العبارات التالية :

$$\left(z_\mu-2i\right)\left(\overline{z_\mu}+2i\right)=R^2 \quad , \quad z_\mu\overline{z_\mu}=\left(z_\mu+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\mu}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$$

   ب) استنتج أن : $z_\mu-\overline{z_\mu}=2i$ و $z_\mu+\overline{z_\mu}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$
   جـ) استنتج $z_\mu$ لاحقة النقطة μ وقيمة $R$.

**التمرين الثالث:(04 نقاط)**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة كما يلي : من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = 2u_n + 5n - 5$

1. احسب $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$.

2. نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n + 5n$

- برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية ، ثم اكتب عبارة كل من $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ ماهي نهاية المتتالية $(u_n)$؟
- عين العدد الطبيعي $n$ حيث: $2^n = 2048$ استنتج أن 2008 حد من حدود المتتالية $(u_n)$.
- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي k : $2^{4k+1} \equiv 2[10]$
- بين أن $u_n$ عدد طبيعي .
- عين حسب قيم $n$ رقم آحاد العدد $u_n$.

**التمرين الرابع : (07 نقاط)**

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + x + e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا ~ .
   . تحقق أن ~ من المجال $]-1.3\ ;\ -1.2[$ .
3. حدد تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x\,e^x}{1+e^x}$ نسمي $(\Gamma)$ المنحنى البياني لها .

1. ا) ادرس تغيرات الدالة $f$ (نلاحظ أن $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة ).
   - برهن أن $f(\sim) = 1 + \sim$
   - برهن أن المنحنى $(\Gamma)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ حيث $y = x$ معادلة له .
   - اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة O مبدأ المعلم .
   - ادرس وضعية المنحنى $(\Gamma)$ بالنسبة للمماس $(T)$.

2. H نقطة فاصلتها $x$ وترتيبها معدوم ،المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع $(\Gamma)$ في النقطة M ويقطع المقارب $(\Delta)$ في النقطة N ، نضع $\ddot{}(x) = \overline{MN}$ .

   ا) بين أن $\ddot{}(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$

   ب) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\ddot{}'(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.g(-x)$

   استنتج أن $\overline{MN}$ يكون أكبر ما يمكن عند $(-\sim)$

   جـ) برهن أن $f(-\sim) = 1 - (-\sim)$

   د) برهن ان المماس للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\sim)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$.

   هـ)ارسم في المعلم المتعامد $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المنحني $(\Gamma)$ و $(\Delta)$ و $(T)$ (تؤخذ 5cm كوحدة )

3. ا) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x \geq 1$ لدينا : $\dfrac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

   ب)استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\Gamma)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ و $x = 1$ و $x = -\sim$

## **الموضوع الثاني**

### **التمرين الأول : (05 نقاط)**

$\theta$ عدد حقيقي من المجال $[0;\pi]$ ، z عدد مركب و $f(z)$ كثير حدود معرف بـ:

$$f(z) = z^3 - (1-2\sin\theta)z^2 + (1-2\sin\theta)z - 1$$

1. أ) تحقق أن العدد 1 جذر لـ $f(z)$ .

ب) عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث : $f(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=0$ .

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، ولتكن النقط A ، B و C لواحقها $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ على الترتيب حيث : $z_1 = 1$ , $z_2 = -\sin\theta + i\cos\theta$ , $z_3 = -\sin\theta - i\cos\theta$

أ) اكتب على الشكل الأسي كل من $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ .

ب) حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم عين قيمة $\theta$ حتى يكون قائم في A .

ج) G مركز ثقل المثلث ABC، ماهي لاحقتها ؟

- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MO}\right\|$

### **التمرين الثاني : (05 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1,2,2)$ , $B(1,0,1)$ , $C(3,2,1)$

و المستوي (P) ذي المعادلة $z=1$ ، النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

$(\Delta)$ هو المستقيم المعرف بـ: $\begin{cases} x = -3+t \\ y = -4-t \ ; \ (t\in\mathbb{R}) \\ z = 1 \end{cases}$

(S) سطح الكرة المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$

من بين الأجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير

| | أ) | ب) | جـ) | د) |
|---|---|---|---|---|
| 1. المستقيم (BC) | محتوى في المستو (P) | يقطع المستوي (P) | يوازي المستوي (P) | عمودي على المستو (P) |
| 2. إحداثيات D هي | (1 ,2,-1) | (1,1,2) | (1,2,1) | (1,2,0) |
| 3. تمثيل الوسيطي لـ(BC) | $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$ | $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=-3t \end{cases}$ | $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$ | $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=3 \end{cases}$ |
| 4. المستقيمان $(\Delta)$ و (BC) | متوازيان تماما | منطبقان | متقاطعان | ليسا من نفس المستوي |
| 5. سطح الكرة (S) | تمس (P) | يقطعها (P) | لا يقطعها (P) | مركزها ينتمي إلى (P) |

**التمرين الثالث :(04 نقاط)**

نعتبر المعادلة $4x - 13y = 7$ حيث $x$ و $y$ عددان صحيحان.

1. عين الحل الخاص $(x_0 , y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0 - y_0 = 4$
2. حل المعادلة (1) .
3. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $x$ و $y$ .
   - ماهي القيم الممكنة للعدد d إذا كان $(x , y)$ حلا للمعادلة (1)؟
   - عين الثنائيات $(x , y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون d=7.
   - عين الثنائيات $(x , y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) التي تحقق $\begin{cases} d = 7 \\ x + y \prec 400 \end{cases}$

**التمرين الرابع : (6 نقاط)**

في كل ما سيأتي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 2cm

**الجزء الأول :** نعتبر الدالة $u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ و (¨) تمثيلها البياني .

- حدد نهاية $u$ عند $-\infty$ .
- برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا : $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$
- استنتج نهاية $u$ عند $+\infty$ .

2. أ) برهن أن : $(u(x)+2x)$ تنتهي إلى الصفر عندما تنتهي $x$ إلى $-\infty$ .
ب) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا :. $u(x) > 0$
ج) استنتج إشارة $(u(x)+2x)$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة .

3. أ) برهن أن : $u'(x) = \dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
ب) ادرس تغيرات الدالة $u$ .
ج) ارسم المنحنى (¨) و المستقيم المقارب له .

**الجزء الثاني :** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \int_0^x \dfrac{-1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ و $(\Gamma)$ تمثيله البياني .

1- تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا : $f(x) = \ln(u(x))$
2- عين نهايات $f$ عند $-\infty$ ثم $+\infty$ وادرس تغيرات الدالة $f$ .
3- عين معادلة للمستقيم $(T)$ مماس المنحني $(\Gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

نعتبر الدالة العددية ¨ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $¨(x) = f(x) + x$ .

برهن أن ¨ متزايدة على $\mathbb{R}$ وان $¨(0) = 0$ ، استنتج وضعية المنحني $(\Gamma)$ بالنسبة للمماس $(T)$.

4- ارسم في نفس المعلم المنحني $(\Gamma)$ و المماس $(T)$.

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\Gamma)$ و المستقيمات التي معادلاتها : y = 0 ، $x = 0$ و $x = ~$ $(~ \succ 0)$

## التصحيح

## الموضوع الاول

### التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(1,2,2)$  $B(-1\ ,\ 0,1)$ و $C(3,2,1)$

1) إثبات أن المستوي $(Q)$ الذي يشمل النقط A و B و C معادلته x-2y+2z-1=0

لدينا $1-2\times2+2\times2-1=0$ أي $A\in(Q)$ و $-1-2\times0+2\times1-1=0$ أي $B\in(Q)$ و $3-2\times2+2\times1-1=0$ أي $C\in(Q)$

إذن $(Q)$ هو المستوي $(ABC)$ ------------------------------------------------------------ 0.5

2)(P) مستو حيث $z=1$ معادلة له

ا) التحقق أن المستقيم $(BC)$ محتوى في المستوي $(P)$.

لدينا $B\in(P)$ و $C\in(P)$ ومنه (BC) محتوى في المستوي $(P)$ ---------------------------------------- 0.5

ب)إستنتاج تقاطع المستوي (P) و $(Q)$

بما أن $(BC)\subset(P)$ و $(BC)\subset(Q)$ فان $(P)\cap(Q)=\{(BC)\}$ ---------------------------------------- 0.5

جـ) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم $(BC)$

لدينا $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x-2y+2z-1=0\\y=t\\z=1\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=2t-1\\y=t\\z=1\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$ ------------------------------------- 0.5

3)إثبات أن النقطة $H(1,2,1)$ هو المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(P)$

لدينا من جهة $\overrightarrow{HA}(0,0,1)$ و $\overrightarrow{n_p}(0,0,1)$ أي $\overrightarrow{HA}$ و $\overrightarrow{n_p}$ مرتبطان خطيا ومن جهة أخرى $H\in(P)$

إذن $H$ هي مسقط للنقطة $A$ على $(P)$ ------------------------------------------------------------ 0.5

$(BC)$ و $(AH)$ غير متقاطعان لأنهما ليسا من نفس المستوي

التبرير $H\notin(BC)$ لان $\begin{cases}1=2t-1\\2=t\\1=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\t=2\end{cases}$ ------------------------------------------------ 0.5

4) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,1),(C-1)\}$

ا) $x_G=\dfrac{1\times1+1\times(-1)-1\times3}{1}=-3$ , $y_G=\dfrac{1\times2+1\times0-1\times2}{1}=0$ , $z_G=\dfrac{1\times2+1\times1-1\times1}{1}=2$

إذن G(-3,0,2) ------------------------------------------------------------------------ 0.5

ب) تعيين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\leftarrow$(*)

لتكن النقطة k مركز ثقل المثلث ABC اذن (*) تكافئ 3MG =3MK أي MG=MK

إذن المجموع (E) هو مجموع نقط المستوي المحوري للقطعة $[GK]$ ------------------------------------- 0.5

### التمرين الثاني :(05نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B حيث: $z_A=\sqrt{3}+i$ , $z_B=\sqrt{3}-i$

1/ كتابة $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي .

لدينا $z_A=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\left[2,\dfrac{®}{6}\right]$ أي $z_A=2e^{i\frac{®}{6}}$

و $z_B=\overline{z_A}=\left[2,-\dfrac{®}{6}\right]$ أي $z_B=2e^{-i\frac{®}{6}}$ ------- 0.5

2) r دوران مركزه o وزاويته $\dfrac{®}{3}$ معناه $z'=e^{i\frac{®}{3}}z$ -------- 0.5

تعيين $z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بالدوران r لدينا $z_{A'}=e^{i\frac{®}{3}}\times2e^{i\frac{®}{6}}=2e^{i\frac{®}{2}}=2i$ إنشاء النقطة A' ------------ 0.5

3) h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{3}{2}$ معناه $z'=-\frac{3}{2}z$

الكتابة على الشكل المثلثي لـ $z_{B'}$ لاحقة B' صورة B بالتحاكي h.

$$z_{B'}=-\frac{3}{2}\times 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{3}{2}\times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

لدينا $=3\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ أي $z_{B'}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ الإنشاء ------- 0.5

$$=3\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left[3\,,\,\frac{5\pi}{6}\right]$$

4) ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OA'B' و R نصف قطرها و $z_\omega$ لاحقة النقطة ω

ا) باستعمال الخاصية $z\bar{z}=|z|^2$

لدينا $(z_\omega-2i)(\overline{z_\omega}+2i)=(z_\omega-2i)(\overline{z_\omega-2i})=|z_\omega-2i|^2=\omega A'^2=R^2$ ----------------------------0.5

و $\left(z_\omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\left(z_\omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}\right)=\left|z_\omega-\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)\right|^2=\omega B'^2=R^2$ -----0.5

ب) استنتاج أن $z_\omega-\overline{z_\omega}=2i$

لدينا $(z_\omega-2i)(\overline{z_\omega}+2i)=R^2$ معناه $z_\omega\overline{z_\omega}+2i\,z_\omega-2i\,\overline{z_\omega}+4=R^2$ (مشطوب: $z_\omega\overline{z_\omega}$ و $R^2$) لأن $(z_\omega\overline{z_\omega}=R^2)$

معناه $2i(z_\omega-\overline{z_\omega})=-4$

معناه $z_\omega-\overline{z_\omega}=-\frac{4}{2i}=2i$ ------------------------------------------ 0.5

ولدينا من جهة أخرى $\left(z_\omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$ يكافئ $z_\omega\overline{z_\omega}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)z_\omega+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\overline{z_\omega}+9=R^2$ (مشطوب: $z_\omega\overline{z_\omega}$ و $R^2$)

يكافئ $\frac{3\sqrt{3}}{2}(z_\omega+\overline{z_\omega})+\frac{3}{2}i(z_\omega-\overline{z_\omega})+9=0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}(z_\omega+\overline{z_\omega})+\frac{1}{2}i\ (2i)+3=0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}(z_\omega+\overline{z_\omega})-1+3=0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}(z_\omega+\overline{z_\omega})=-2$

يكافئ $z_\omega+\overline{z_\omega}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$ ---------------------- 0.5



جـ) استنتاج لاحقة النقطة ω وقيمة R

لدينا $z_\omega+\overline{z_\omega}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ بالجمع نجد $2z_\omega=-\frac{4\sqrt{3}}{3}+2i$

$z_\omega-\overline{z_\omega}=2i$

ومنه $z_\omega=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$ ---------------------------------------------------------- 0.5

و بالتالي $R=|z_\omega|=\frac{\sqrt{7}}{3}$ ---------------------------------------------------------- 0.5

## التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = 2u_n + 5n - 5$

1) $u_1 = 2u_0 - 5 = 11$ , $u_2 = 2u_1 + 0 = 22$ , $u_3 = 2u_2 + 5\times 2 - 5 = 49$ ---------------- 0.5

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 5n$

- **إثبات أن $(v_n)$ متتالية هندسية مع تعين أساسها وحدها الأول .**

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 5(n+1) = 2u_n + 5n - 5 + 5n + 5 = 2u_n + 10 = 2(u_n + 5) = 2v_n$

أي $(v_n)$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = u_0 = 8$ ---------------------------------- 0.5

عبارة $v_n$ بدلالة n : $v_n = 8\times 2^n = 2^{n+3}$

عبارة $u_n$ بدلالة n : $u_n = v_n - 5n = 2^{n+3} - 5n$ 0.5

0.5 --- $\lim u_n = \lim(8\times 2^n - 5n) = \lim n\left(8\frac{2^n}{n} - 5\right) = +8$

- **تعيين العدد الطبيعي n حيث** $2^n = 2048$

لدينا $2^n = 2048$ ومنه $n\ln 2 = \ln 2048$ ومنه $n = \frac{\ln 2048}{\ln 2} = 11$ ------------------------------- 0.5

**لستنتاج أن** 2008 حد من حدود المتتالية $(u_n)$.

لدينا $u_8 = 2008$ لان $u_8 = 2^{8+3} - 5\times 8 = 2^{11} - 40 = 2048 - 40 = 2008$ ---------------------------- 0.5

**إثبات انه من اجل كل عدد طبيعي k :** $2^{4k+1} \equiv 2[10]$

باستعمال البرهان بالتراجع : **نسمي** P(k) هذه الخاصية .

ا) **نتحقق من صحة** P(0) : لدينا $2^{4\times 0+1} = 2$ و $2 \equiv 2[10]$

ب) **نفرض أن** P(k) صحيحة أي $2^{4k+1} \equiv 2[10]$ من اجل أي عدد طبيعي k

و **نبرهن أن** P(k+1) صحيحة أي $2^{4(k+1)+1} \equiv 2[10]$ من اجل أي عدد طبيعي k؟

لدينا $2^{4(k+1)+1} = 2^4 \times 2^{4k+1}$ مع $(2^4 \equiv 6[10]; 2^{4k+1} \equiv 2[10])$ ومنه $2^4 \times 2^{4k+1} \equiv 6\times 2[10]$ ومنه $2^{4k+5} \equiv 2[10]$

أي P(k+1) صحيحة

نتيجة : من أ) وب)**وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان** $2^{4k+1} \equiv 2[10]$ ---------------------------- 01

- **إثبات أن $u_n$ عدد طبيعي** $(u_n = 8\times 2^n - 5n)$

- **لإثبات أن** $(8\times 2^n - 5n) \in \mathbb{N}$ **يكفي** أن نثبت أن $8\times 2^n \geq 5n$ **(لان** $8\times 2^n \in \mathbb{N}$ ; $5n \in \mathbb{N}$ )

لدينا من اجل أي عدد طبيعي n : $(8 > 5 \quad ; \quad 2^n > n)$ ومنه $8\times 2^n > 5n$ ومنه $8\times 2^n - 5n > 0$ ومنه $u_n \in \mathbb{N}$ ---- 0.5

( $2^n > n$ من اجل أي عدد طبيعي n يمكن إثباتها بالتراجع )

- تعيين حسب قيم n **رقم آحاد العدد** $u_n$.

أي ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n **بواقي قسمة** $u_n$ **على** 10 لدينا:

| $n \equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | [10] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | [10] |
| $8\times 2^n \equiv$ | 8 | 6 | 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | 4 | 8 | 6 | [10] |
| $5n \equiv$ | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | [10] |
| $u_n$ | 8 | 1 | 2 | 9 | 8 | 1 | 2 | 9 | 8 | 1 | [10] |

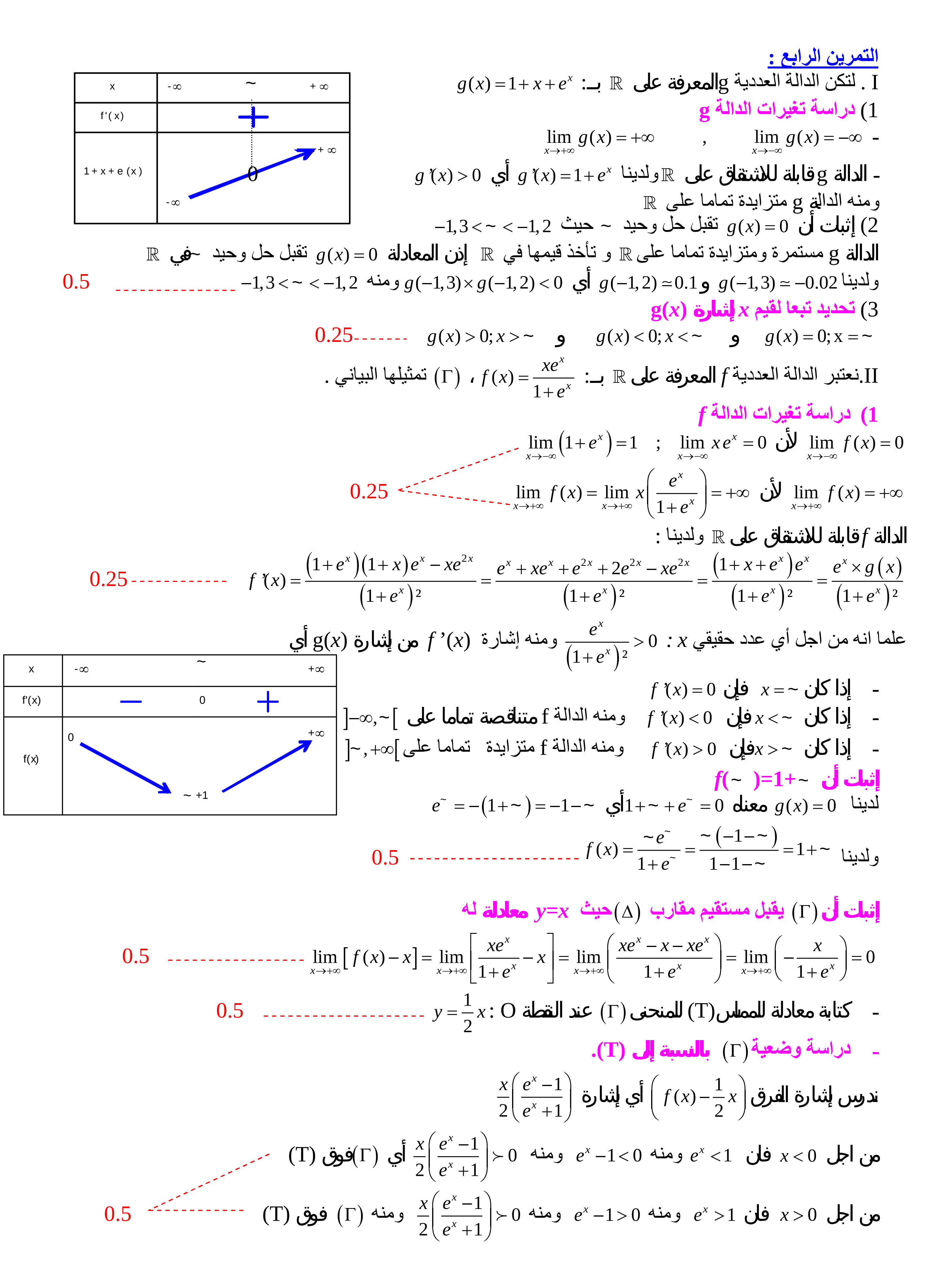
**من اجل** n=4P $\quad P \in \mathbb{N} \quad$ رقم الآحاد هو 8

**من اجل** n=4P+1 $\quad P \in \mathbb{N} \quad$ رقم الآحاد هو 1

**من اجل** n=4P+2 $\quad P \in \mathbb{N} \quad$ رقم الآحاد هو 2

**من اجل** n=4P+3 $\quad P \in \mathbb{N} \quad$ رقم الآحاد هو 9

0.5



## التمرين الرابع :

I . لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+x+e^{x}$

1) **دراسة تغيرات الدالة g**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=1+e^{x}$ أي $g'(x)>0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

| x | $-\infty$ | $\sim$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | |
| 1 + x + e (x) | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

2) إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\sim$ حيث $-1,3<\sim<-1,2$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\sim$ في $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-1,3)\simeq-0.02$ و $g(-1,2)\simeq0.1$ أي $g(-1,3)\times g(-1,2)<0$ ومنه $-1,3<\sim<-1,2$ ---------------- 0.5

3) **تحديد تبعا لقيم $x$ إشارة g(x)**

$g(x)=0; x=\sim$ و $g(x)<0; x<\sim$ و $g(x)>0; x>\sim$ ------- 0.25

II. نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{1+e^{x}}$ ، $(\Gamma)$ تمثيلها البياني .

1) **دراسة تغيرات الدالة $f$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{x})=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)=+\infty$ 0.25

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{(1+e^{x})(1+x)e^{x}-xe^{2x}}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{e^{x}+xe^{x}+e^{2x}+2e^{2x}-xe^{2x}}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{(1+x+e^{x})e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{e^{x}\times g(x)}{(1+e^{x})^{2}}$$ ------------ 0.25

علما انه من اجل أي عدد حقيقي $x$ : $\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة g(x) أي

| x | $-\infty$ | $\sim$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | − | 0 | + |
| f(x) | 0 | $\sim+1$ | $+\infty$ |

- إذا كان $x=\sim$ فإن $f'(x)=0$
- إذا كان $x<\sim$ فإن $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,\sim[$
- إذا كان $x>\sim$ فإن $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]\sim,+\infty[$

**إثبات أن $f(\sim)=1+\sim$**

لدينا $g(x)=0$ معناه $1+\sim+e^{\sim}=0$ أي $e^{\sim}=-(1+\sim)=-1-\sim$

ولدينا $f(x)=\dfrac{\sim e^{\sim}}{1+e^{\sim}}=\dfrac{\sim(-1-\sim)}{1-1-\sim}=1+\sim$ -------------------- 0.5

**إثبات أن $(\Gamma)$ يقبل مستقيم مقارب $(\Delta)$ حيث $y=x$ معادلة له**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^{x}}{1+e^{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{x}-x-xe^{x}}{1+e^{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{1+e^{x}}\right)=0$$ ----------------- 0.5

- كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة O : $y=\dfrac{1}{2}x$ ------------------ 0.5

- **دراسة وضعية $(\Gamma)$ بالنسبة إلى (T).**

ندرس إشارة الفرق $\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)$ أي إشارة $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)$

من اجل $x<0$ فان $e^{x}<1$ ومنه $e^{x}-1<0$ ومنه $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\succ0$ أي $(\Gamma)$ فوق (T)

من اجل $x>0$ فان $e^{x}>1$ ومنه $e^{x}-1>0$ ومنه $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\succ0$ ومنه $(\Gamma)$ فوق (T) ---------- 0.5

H(2 نقطة فاصلتها $x$ وترتيبها معدوم . المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع $(\Gamma)$ في النقطة M ويقطع المقارب $(\Delta)$ في النقطة N.

نضع $\varphi(x)=\overline{MN}$

أ) اثبات ان $\varphi(x)=\frac{x}{1+e^x}$

لدينا $\varphi(x)=x-f(x)$ أي $\varphi(x)=x-\frac{xe^x}{1+e^x}$ أي $\varphi(x)=\frac{x}{1+e^x}$ ------------------------ 0.5

البرهان انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $\varphi'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\times g(-x)$

لدينا $\varphi'(x)=-\frac{1+e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x\left(e^{-x}+1-x\right)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\times g(-x)$ --------------- 0.5

$\varphi'(x)=0$ معناه $g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$ و منه $x=-\alpha$

$\varphi'(x)>0$ معناه $g(-x)>0$ معناه $-x>\alpha$ ومنه $x<-\alpha$

$\varphi'(x)<0$ معناه $g(-x)<0$ معناه $-x<\alpha$ ومنه $x>-\alpha$

أي $\varphi(x)$ تقبل قيمة حدية عظمى من اجل $x=-\alpha$

جـ) إثبات أن $f(-\alpha)=1$

لدينا $f(-\alpha)=\frac{-\alpha e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}=\frac{-\alpha}{1+e^{\alpha}}=\frac{-\alpha}{1-1-\alpha}=\frac{-\alpha}{-\alpha}=1$ ------------------------ 0.25

د) البرهان أن المماس للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة A ذات الفاصلة $-\alpha$ يوازي $(\Delta)$.-------------- 0.5

لدينا $f'(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}\times g(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}\left(1-\alpha+e^{-\alpha}\right)}{(1+e^{-\alpha})^2}=\frac{1+e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}$

مع $e^{\alpha}=-1-\alpha$ إذن $f'(-\alpha)=\frac{1-1-\alpha-\alpha\left(-1-\alpha\right)}{(1-1-\alpha)^2}=1$

ومنه المماس في A يوازي $(\Delta)$.

هـ) الرسم لكل من $(\Gamma)$ و $(\Delta)$ و (T)



3. أ) البرهان انه من اجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ لدينا $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$

نبرهن من جهة أن $f(x)\leq x$ أي $\frac{xe^x}{1+e^x}\leq x$ أي $\frac{xe^x}{1+e^x}-x\leq 0$ أي $\frac{-x}{1+e^x}\leq 0$ وهذا صحيح من اجل $x\geq 1$

ونبرهن من جهة أخرى أن $f(x)-\frac{e^x}{1+e^x}\geq 0$ أي $\underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{\geq 0}\Big(\underbrace{x-1}_{\geq 0}\Big)\geq 0$ وهذا صحيح وبالتالي $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ ---- 0.5

ب) إيجاد حصر لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\Gamma)$ و المستقيمات التي معادلتها y=0 ، x=1 و $x=-\alpha$

بمأن $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ فإن $\int_1^{-\alpha}\frac{e^x}{1+e^x}dx\leq\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\int_1^{-\alpha}x\,dx$

أي $\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_1^{-\alpha}\leq\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^{-\alpha}$

أي $\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1+e}\right)\ u.a\leq\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}\left(\alpha^2-1\right)u.a$ ------------------------------ 0.5

## التصحيح

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول: (05 نقاط)** $\theta$ عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$ و $f(z)$ كثير الحدود حيث :

**1)** $f(z)=z^3-(1-2\sin\theta)z^2+(1-2\sin\theta)z-1$

أ) التحقيق ان العدد 1 جذر لـ $f(z)$

لدينا $f(1)=1^3-(1-2\sin\theta)\times1^2+(1-2\sin\theta)\times1-1$

$=1-1+2\sin\theta+1-2\sin\theta-1=0$ ------------------ 0.5

أي 1 هو جذر لـ $f(z)$

ب) تعين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حيث $f(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

باستعمال طريقة هورنر نجد

| | 1 | $-1+2\sin\theta$ | $1-2\sin\theta$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | $2\sin\theta$ | 1 |
| | 1 | $2\sin\theta$ | 1 | 0 |

لذن $a=2\sin\theta$ و b=1 ------------------------------ 0.5

جـ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة f(z)=0

f(z)=0 يكافئ $(z-1)(z^2+2\sin\theta\times z+1)=0$ يكافئ z-1=0 او

$z^2+2\sin\theta\times z+1=0$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2\sin\theta\times z+1=0$

$\Delta=4\sin^2\theta-4=4(\sin^2\theta-1)=-4\cos^2\theta$ اذن $\Delta=4i^2\cos^2\theta$

اما $z=\dfrac{-2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}$ او $z=\dfrac{-2\sin\theta+2i\cos\theta}{2}$ ----------------------------------------- 0.5

$=-\sin\theta-i\cos\theta$ $\quad$ $=-\sin\theta+i\cos\theta$

$A(z_1=1),B(z_2=-\sin\theta+i\cos\theta);C(z_3=-\sin\theta-i\cos\theta)$

2) أ) كتابة كل من $z_1$, $z_2$ ; $z_3$ على الشكل الأسي.

لدينا $z_1=1=[1,0]=e^{i0}$ ------------------------------------------------------------- 0.5

$z_2=-\sin\theta+i\cos\theta=\sin(-\theta)+i\cos(-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1,\frac{\pi}{2}+\theta\right]=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ 0.5

$z_3=\overline{z_2}=e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ ------------------------------------------------------------- 0.5

ب) المثلث $ABC$ متساوي الساقين لان $|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{2(1+\sin\theta)}$ -------------- 0.5

تعيين قيمة $\theta$ حتى يكون $ABC$ قائم في $A$ .

A(1 ;0) ، $B(-\sin\theta;\cos\theta)$ و $C(-\sin\theta;-\cos\theta)$

$\overrightarrow{BA}(1+\sin\theta;-\cos\theta)$

$\overrightarrow{CA}(1+\sin\theta;\cos\theta)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0$ يكافئ

$(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta=0$

$2\sin^2\theta+2\sin\theta=0$ (1)

$2\sin\theta(\sin\theta+1)=0$

يكافئ $\sin\theta=0$ أو $\sin\theta+1=0$ لا تقبل حل في المجال $[0,\pi]$

يكافئ $\theta=k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

وبما ان $\theta\in[0,\pi]$ فان $\theta=\{0,\pi\}$ -------------------------------------------------- 0.5

جـ) مركز G مركز المثلث ABC نعتبر لاحقة G أي $Z_G$ ------------------------------- 0.5

د) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MO}\|$ ⟵ (*)

(*) يكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MO}\|$

يكافئ MG=MO

أي مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[GO]$ ------------------------- 0.5

**التمرين الثاني :(05نقاط)**

1) بما أن $B\in(P)$ و $C\in(P)$ فان المستقيم $(BC)\in(P)$ ---------------- 01

2) إحداثيات D هي (1،2،1) --------------------- 01

3) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \quad\quad t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$ تمثيل وسيطي لـ (BC) -------------- 01

4) المستقيمان $(\Delta)$ و (BC) متقاطعان (متعامدان) فهما من نفس المستوي $\vec{n}_\Delta.\overrightarrow{BC}=0$ ---------- 01

5) S سطح كرة مركزها $\mu(1,2,2)$ ونصف قطرها r = 3  $d(\mu,P)=1cm$ ----------- 01

6) إذن S و (P) متقاطعان

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

نعتبر المعادلة 4x-13y=7 ⟵ (1) حيث x وy عددان صحيحان

1) تعيين الحل الخاص $(x_0,y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0-y_0=4$

حل الجملة $\begin{cases} 4x_0-13y_0=7 \\ x_0-y_0=4 \end{cases}$

المحدد $d=\begin{vmatrix} 4 & -13 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=9$ أي $x_0=\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{9}=5\ ;\ y_0=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{9}=1$ --------------------- 01

إذن (5,1) حل خاص للمعادلة (1)

2) تعيين حلول المعادلة (1) لدينا

$$\begin{array}{l} 4x-13y=7 \\ \underline{4\times5-13\times1=7} \\ 4(x-5)-13(y-1)=0 \end{array}$$

أي 4(x-5)=13(y-1)

لدينا $13 \mid 4(x-5)$ و 13 14=1 إذن $13 \mid x-5$ ومنه x=13k+5

$k\in\mathbb{R}$

$4 \mid 13(y-1)$ و 41 13=1 إذن $4 \mid y-1$ ومنه y=4k+1

3) ليكن له القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x وy

* القيم الممكنة للعدد d إذا كان (x ,y) حلا للمعادلة (1)

لدينا $d \mid x$ ومنه $d \mid y$ ومنه $d \mid 4x$ و $d \mid 13y$ ومنه $d \mid 4x-13y$ ومنه $d \mid 7$ إذن $d\in D_7$ أي $d\in\{1,7\}$ ------ 0.5

نعتبر الثنائيات (x ,y) من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون d=7

$\begin{cases} x\equiv0[7] \\ \text{او} \\ y\equiv0[7] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 13k+5\equiv0[7] \\ 4k+1\equiv0[7] \end{cases}$

$2\times4k\equiv-2[7]$

$4k+1\equiv0[7]$ يكافئ $4k\equiv-1[7]$ يكافئ $k\equiv5[7]$ اي $k=7\sim+5$

$\sim\in\mathbb{N}$

و بالتالي $x=91\sim+70$ و $y=28\sim+21$ $(\sim\in\mathbb{N})$ ------------------------- 1

نعتبر الثنائيات (x ,y) من الأعداد الطبيعية حلول (1) والتي تحقق $\begin{cases} d=7 \\ x+y<400 \end{cases}$

$91\sim+70+28\sim+21<400$

$119\sim+91<400$

$119\sim<309$ يكافئ $x+y<400$

$\sim<\dfrac{309}{119}$

$\sim<2,6$

$\sim\in\{0;1,2\}$

إذن $(x,y)\in\{(70,21);(161,49),(252,77)\}$ ------------------------------ 0.5

**التمرين الرابع :(07نقاط)**

نعتبر الدالة U المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $U(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}U(x)=+\sim$ --------------- 0.25

$\lim\limits_{x\to+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ 0.25

2) أ) نبرهن أن : (U(x)+2x) تؤول إلى ∞ عندما x يؤول الى $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(U(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$$

( المستقيم ذو المعادلة y=-2x مستقيم مقارب مائل لـ ( ¨ ) بجوار $-\infty$ )

ب) نبرهن انه من اجل $x\in\mathbb{R}$ : $U(x)>0$ أي $\sqrt{x^2+1}-x$

من اجل $x<0$ فإن $\sqrt{x^2+1}>x$ 0.5

$x>0$ فإن $\sqrt{x^2+1}>x$ ومنه $x^2+1>x^2$ أي $1>0$ صحيحة

ج) لستنتاج إشارة $(U(x)+2x)$

$U(x)+2x=\sqrt{x^2+1}+x$

لدينا $=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

إذن إشارة $(U(x)+2x)$ من إشارة $\sqrt{x^2+1}-x$ وهو موجب دوما. --------- 0.5

**التفسير البياني :** المنحنى ( ¨ ) يقع فوق المستقيم المقارب .

3) نبرهن ان $u'(x)=\dfrac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

أ) الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$U'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ------------------------- 0.5

ب) دراسة تغيرات الدالة

إشارة U'(x) عكس إشارة $U(x)$

أي U'(x)<0 من اجل كل $x\in\mathbb{R}$

جـ) رسم ( ¨ ) و المستقيمات المقاربة له .

**الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

1/ نتحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(x)=\ln(u(x))$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=\frac{U'(x)}{U(x)}=\frac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{U(x)}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$ ------------------ 0.5

2/ بما أن $\lim_{x\to-\infty}U(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}U(x)=0^+$ فإن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 0.5

دراسة تغيرات الدالة $f$ لدينا $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}<0$ و منه الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

3/ كتابة معادلة للمستقيم $(T)$ مماس $(\Gamma)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=-x$ ------------------------------------ 0.5

نعتبر الدالة ¨ على $\mathbb{R}$ لدينا : $¨(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$

من اجل أي عدد حقيقي $x$ لدينا : $x^2+1>1$ أي $\sqrt{x^2+1}>1$

أي $\sqrt{x^2+1}-1>0$

أي $¨'(x)>0$

وبالتالي ¨ متزايدة

ولدينا $¨(0)=f(0)+2=0$ -------------------------------- 0.25

أ) رسم $(\Gamma)$ و المماس $(T)$ ---------------------------------- 0.5

5) حساب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى $(\Gamma)$ و المستقيمات التي معادلتها $y=0$ ، $x=0$ و $x=\sim$ $(\sim>0)$

لدينا $A(\sim)=\int_0^{\sim}-f(x)dx=\int_0^{\sim}-\ln(U(x)dx)$

نستعمل التكامل بالتجزئة

نضع $S(x)=\ln(U(x))$ ومنه $S'(x)=\frac{U'(x)}{U(x)}$

$t'(x)=1$ ، $t(x)zx$

$$A(\sim)=-[x\ln(U(x))]_0^{\sim}+\int_0^{\sim}x\times\frac{U'(x)}{U(x)}dx$$

مع $\frac{U'(x)}{U(x)}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$ من الجواب للسؤال 3) أ)

$$A(\sim)=-[x\ln(U(x))]_0^{\sim}-\int_0^{\sim}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=-[x\ln(U(x))]_0^{\sim}-\frac{1}{2}\int_0^{\sim}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

إذن $=-[x\ln(U(x))]_0^{\sim}-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sim}$ ---------- 0.5

$$=-\left[x\ln(U(x))-\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sim}$$

$$=\left(1-\sim\ln(U(\sim))-\sqrt{\sim^2+1}+1\right)U.A$$

انتهى

بالتوفيق في البكالوريا

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــوادي — ثانويات: بوشوشة-عبد العزيز الشريف
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي (دورة: ماي2013) — حساني عبد الكريم-السعيد عبد الحي
الشعبة: علوم تجريبية — ثانوية الأخوين كـيرد

---

اختبار في مادة الرياضيات — المـدة: 03 ساعات ونصف

---

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضـــوع الأول

**التمرين الأول:** ( 4.5 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول $z$: $z^2-2z+2=0$.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

لتكن النقط $K$ ، $L$ و $M$ والتي لواحقها على الترتيب: $z_K=1+i$ ؛ $z_L=1-i$ و $z_M=-i\sqrt{3}$.

أنشئ النقط $K$ ، $L$ و $M$ في المعلم السابق.

3-أ) تحقق أن $z_N$ لاحقة النقطة $N$ نظيرة النقطة $M$ بالنسبة للنقطة $L$ هي $2+i(\sqrt{3}-2)$.

ب)نعتبر الدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث: $r(M)=A$ و $r(N)=C$.

عيّن اللاحقتين $z_A$ و $z_C$ للنقطتين $A$ ، $C$ على الترتيب.

جـ)نعتبر الانسحاب $t$ الذي لاحقة شعاعه هي $2i$ حيث: $t(M)=D$ و $t(N)=B$.

عيّن اللاحقتين $z_D$ و $z_B$ للنقطتين $D$ ، $B$ على الترتيب.

4-أ) بيّن أن النقطة $K$ هي منتصف كلا من القطعتين المستقيمتين $[DB]$ و $[AC]$.

ب)بيّن أن: $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

**التمرين الثاني** ( 4نقط)

I)لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0 \prec u_n \prec 1$.

2-أ) تحقق أنّ: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

ب) بيّن أن $(u_n)$ متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

II) لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n}$

أ) بيّن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) اكتب $v_n$ بدلالة $n$ و استنتج $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم احسب من جديد نهاية المتتالية $(u_n)$.

جـ) احسب بدلالة $n$ المجموعين $S_n=v_0+v_1+......+v_n$ و $T_n=v_0+3v_1+9v_2+......+3^n v_n$

**التمرين الثالث** **( 4,5نقط)**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ . نعتبر النقطتين $A(12;7;-13)$ ، $B(3;1;2)$ والمستويان $(P)$ و $(P')$ حيث $(P)$ ذو المعادلة الديكارتية $3x+2y-5z-1=0$ و $(P')$ ذو المعادلة الديكارتية $x+y-2z=0$ .

1) بيّن أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له.

2) أثبت أن النقطة $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$ .

3) ليكن $(Q)$ المستوي والمعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=2t-2\lambda+6 \\ y=2t+3\lambda+5 \quad t;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=2t-6 \end{cases}$

أ) بيّن أن المستويان $(P)$ و $(Q)$ متوازيان.

ب) تحقق أن المعادلة : $3x+2y-5z=58$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ .

جـ) تحقق أنّ النقطة $I$ منتصف القطعة $[BA]$ تنتمي للمستوي $(Q)$ واستنتج أن $(Q)$ هومستوي محوري للقطعة $[BA]$

4) لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء والتي تحقق : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ .

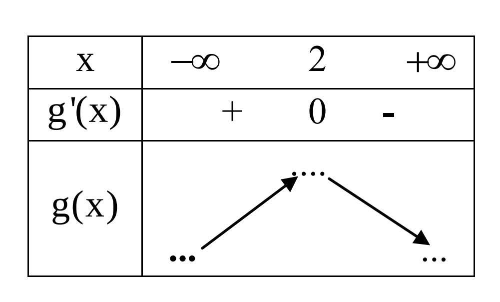
أ) بيّن أن $(S)$ هي سطح كرة يطلب تحديد عناصرها المميزة .

ب) استنتج ان المستوي $(Q)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

**التمرين الرابع** **( 07 نقط)**

I- الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة العددية $g$ والمعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي

$$g(x)=(x-1)e^{-x}+2$$

| $x$ | $-\infty$     $2$     $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | +    0    - |
| $g(x)$ |  |

أ) احسب $g(2)$ ، ثم أتمم النهايات المنقوصة في جدول التغيرات

ب) علل وجودعدد حقيقي وحيد $\alpha$ بحيث: $g(\alpha)=0$ : يحقق $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$

جـ) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ .

II- $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- بيّن أن : $f(\alpha)=2\alpha+3+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

3) بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيتّها.

4-أ- بيّن أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(d)$ معادلته: $y=2x+1$ ،ثم ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(d)$

جـ-أنشئ المنحنى $(C_f)$ في المعلم السابق وعلى المجال $]-1,5;+\infty[$ (تعطى $f(-1,5)=4,72$)

5) لتكن الدالة $h$ والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(x^2.e^x)$ .

بالستعمال مشتق دالة مركبة ، استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ ثم شكل جدول تغيراتها.

6) لتكن الدالة $k$ والمعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $k(x)=(ax+b)e^{-x}$ .

أ-عيّن العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث تكون $k$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto -xe^{-x}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

# الموضـــوع الثاني

**التمرين الأول**: ( 4.5 نقط)

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $3u_{n+1}=u_n+4n+4$.

1) احسب $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n>0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$، $u_n>\frac{4}{3}n$ و استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$.

3) نعرف المتتالية $(v_n)$ بـ: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n=u_n-2n+1$.

أ) برهن أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n=4\left(\frac{1}{3}\right)^n+2n-1$.

جـ) احسب بدلالة $n$. المجموع $S_n$ المعرف من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ :

$S_n=v_0+v_1+......+v_n$ ثم استنتج بدلالة $n$ المجموع $T_n$ حيث: $T_n=u_0+u_1+......+u_n$

**التمرين الثاني**: ( 4.5 نقط)

في الفضاء المزود بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتعامد والمتجانس نعتبر النقط $A(1;0;-2)$ ، $B(3;0;1)$ ، $C(1;0;1)$

1. أكتب معادلة لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها $A$ و تشمل النقطة $B$

2. لتكن $(\Delta)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

- بين أن $(\Delta)$ مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة $B$

3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل النقطة $A$ و يعامد المستقيم $(\Delta)$ .

4. أ- عين احداثيات نقطة تقاطع المستوي $(P)$ و المستقيم $(\Delta)$ .

ب- أحسب بعد النقطة $A$ عن المستقيم $(\Delta)$ ثم استنتج أن $(\Delta)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ في نقطتين .

5. $t$ عدد حقيقي و $G$ مرجح الجملة $\{(C;1),(B;e^t)\}$. أ) بين أن : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$ .

ب) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$.

جـ) استنتج ان مجموعة النقط $G$ عندما يتغير $t$ في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$ .

**التمرين الثالث**: ( 4نقط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ صور الأعداد المركبة

$z_A=-2i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\sqrt{3}+i$

**1.** أ) اكتب $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ على الشكل الأسي .

ب) استنتج مركز ونصف قطر الدائرة $(C)$ التي تشمل النقط $A$ ، $B$ ، $C$

جـ) علم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ثم أرسم الدائرة $(C)$

**1.**)اكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي ،ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$

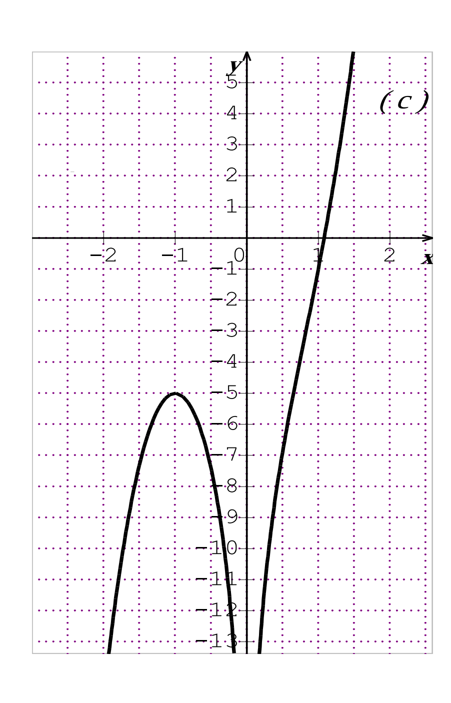
**2.** ليكن $r$ الدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$

**أ)** بين أن النقطة $O'$ ذات اللاحقة $-\sqrt{3}-i$ صورة النقطة $O$ بالدوران $r$

**ب)** بين أن $[O'C]$ قطرا للدائرة $(C)$ ثم انشئ $(C')$ صورة الدائرة $(C)$ بالدوران $r$.

جـ) تحقق أن الدائرتين $(C)$ و $(C')$ تشتركان في النقطتين $A$ و $B$

**التمرين الرابع**: ( **07 نقط**)




*I*-المنحنى المقابل هو التمثيل البياني للدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 3 + 6\ln|x|$

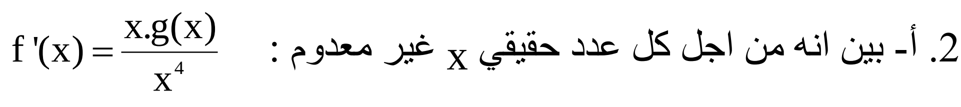
بقراءة بيانية : شكل جدول تغيرات $g$ .

1) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ يحقق $1,07 \prec \alpha \prec 1,09$

2) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$ .

*II*- نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 2x - 3\frac{\ln|x|}{x^2}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المتعامدو $\|\vec{i}\| = 2cm$ ، $\|\vec{j}\| = 1cm$

1. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة الاخيرة هندسيا



2. أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم : $f'(x) = \frac{x.g(x)}{x^4}$

ب- استنتج اشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات $f(x)$

جـ- بين ان $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

3. أ-بين ان المستقيم $(D)$ ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ ثم ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة الى $(D)$

4. أ-بين انه يوجد مماس $(\Delta)$ لــ $(C_f)$ يوازي المستقيم $(D)$ ويمس $(C_f)$ في نقطتين يطلب اعطاء معادلة لهذا المماس

ب- انشئ $(\Delta)$ و $(D)$ و $(C_f)$ . ( تعطى $f(-0,75) = 0$ )

5. أ- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و اشارة حلول المعادلة : $mx^2 + 3\ln x = 0$

ب- لتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = \frac{a + b\ln|x|}{x}$

*عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث تكون $h$ دالة اصلية للدالة $x \to \frac{\ln x}{x}$ على $\mathbb{R}^*$

*استنتج دالة اصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$ .

ثانوية بوشـــوشة- الـــوادي 《 شعبة: 3 علوم وتجريبية》

# الحل النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبيةدورة2013

**المادة: الرياضيات** **الموضوع الأول** إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي

**التمرين الأول :( 4.5 نقط)**

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2-2z+2=0$.

$z^2-2z+2=0$ تكافئ $z^2-2z+1=-1$

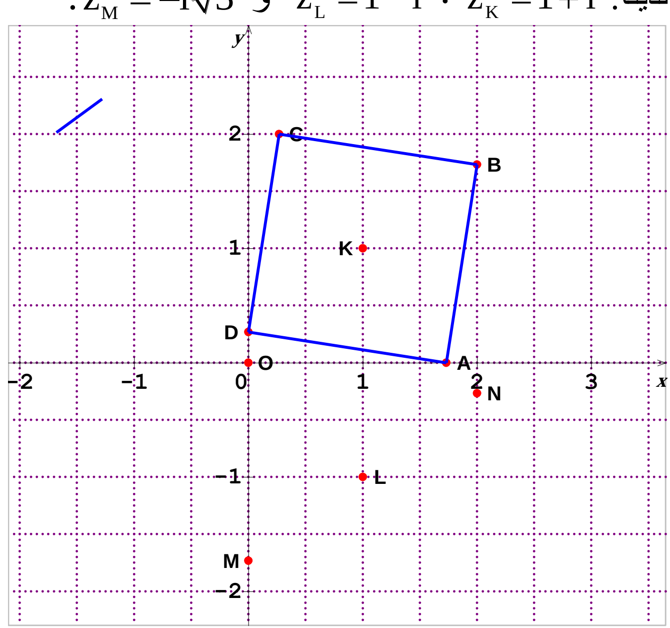
تكافئ $(z-1)^2=i^2$

تكافئ $z-1=i$ أو $z-1=-i$

تكافئ $\boxed{z=1+i \text{ أو } z=1-i}$

2)إنشاء النقط $K$ ، $L$ و $M$

لدينا: $z_K=1+i$ ؛ $z_L=1-i$ و $z_M=-i\sqrt{3}$.




3-أ)التحقق أن $z_N=2+i(\sqrt{3}-2)$

لدينا النقطة $N$ نظيرة النقطة $M$ بالنسبة للنقطة $L$

ومنه : $z_N=2z_L-z_M=2+i(\sqrt{3}-2)$

**ب) تعيين اللاحقتين $z_A$ و $z_C$**

لدينا: $r$ دوران مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

وعليه العبارة المركبة لـ $r$ هي: $z'=iz$

لدينا: $r(M)=A$ معناه $z_A=iz_M=\sqrt{3}$

$r(N)=C$ معناه $z_C=iz_N=(2-\sqrt{3})+2i$

**جـ) تعيين اللاحقتين $z_D$ و $z_B$**

لدينا: $t$ انسحاب لاحقة شعاعه $2i$

وعليه العبارة المركبة لـ $t$ هي: $z'=z+2i$

لدينا: $r(M)=D$ معناه $z_D=z_M+2i=(2-\sqrt{3})i$

$r(N)=B$ معناه $z_B=z_N+2i=2+\sqrt{3}i$

4-أ)تبيّان أن $K$ هي منتصف كلا من $[DB]$ و $[AC]$

لدينا: $z_K=1+i=\frac{2+\sqrt{3}i+(2-\sqrt{3})i}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$

$z_K=1+i=\frac{\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})+2i}{2}=\frac{z_A+z_C}{2}$

ب)تبيّان أن: $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

$$\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=\frac{(2-\sqrt{3})+2i-(1+i)}{2+\sqrt{3}i-(1+i)}=\frac{(1-\sqrt{3})+i}{1+(\sqrt{3}-1)i}$$

بعد ضرب حدّي الكسر في مرافق المقام نجد $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$

$\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ معناه $\left|\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}\right|=|i|=1$ معناه $CK=BK$

$\arg\left(\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}\right)=\arg(i)$ معناه $(\overrightarrow{KC};\overrightarrow{KB})=\frac{\pi}{2}$

ومنه الرباعي $ABCD$ مربع لأن القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتعامدان

**التمرين الثاني ( 4نقط)**

**I-1)البرهن بالتراجع أنه $0\prec u_n\prec 1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$**

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $0\prec u_0\prec 1$ محققة لأن $u_0=\frac{1}{3}$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحّة $P(n+1)$

لدينا: $0\prec u_n\prec 1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ومنه: $0\prec 2u_n\prec 2$ ومنه $1\prec 1+2u_n\prec 3$

ومنه $\frac{1}{3}\prec\frac{1}{1+2u_n}\prec 1$ ومنه $-1\prec-\frac{1}{1+2u_n}\prec-\frac{1}{3}$

ومنه $0\prec 1-\frac{1}{1+2u_n}\prec\frac{2}{3}$ ومنه $0\prec\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{1+2u_n}\right)\prec 1$

وعليه $0\prec u_{n+1}\prec 1$ ومنه الخاصية $0\prec u_n\prec 1$ صحيحة

**2-أ)التحقق أنّ: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$**

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}-\frac{2}{3}u_n\right]$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{3(1+2u_n)-3-2u_n(1+2u_n)}{3(1+2u_n)}\right]$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{4u_n(1-2u_n)}{3(1+2u_n)}\right]$$

**استنتاج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$**

لدينا: $0 \prec u_n \prec 1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}\succ 0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

وعليه المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

**ب)تبيان ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة وحساب نهايتها**

المتتالية $(u_n)$ متقاربة لأنها محدودة من الأعلى ومتزايدة

لحساب النهاية نضع : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=\alpha$

لدينا: $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]$ ومنه: $\alpha=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2\alpha}\right]$

بعد حل هذه المعادلة نجد: $\alpha=1$ أو $\alpha=0$ مرفوض

**II-أ)تبيان ان $(v_n)$ م.هـ وتعيين أساسها وحدها الأول**

$(v_n)$ م.هندسية معناه $v_{n+1}=q.v_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}}=\frac{\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]-1}{2\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{1+2u_n}\right]}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-1}{2u_n}\right)$$

ومنه: $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ أي $(v_n)$ م.هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{2u_0}=-1$

**ب)كتابة $v_n$ بدلالة $n$ و استنتاج $u_n$ بدلالة $n$ ثم حساب من جديد نهاية المتتالية $(u_n)$.**

لدينا: $v_n=v_0.q^n=(-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n}$ ومنه: $u_n=\frac{1}{1-2v_n}=\frac{1}{1+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1-2v_n}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

**جـ) احسب بدلالة n المجموعين $S_n$ و $T_n$**

لدينا: $S_n=v_0+v_1+......+v_n$

ومنه: $$S_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=(-1)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right]=\frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

لدينا: $T_n=v_0+3v_1+9v_2+......+3^n v_n$

ومنه: $T_n=v_0+3v_0.q+9v_0q^2+......+3^n q_n$

أي: $T_n=v_0(1+3.q+9q^2+......+3^n q_n)=v_0(n+1)$

إذن: $T_n=(-1)(n+1)$.

**التمرين الثالث (4,5 نقط)**

**1) تبيّان أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له.**

$(P)$ و $(P')$ متقاطعان لأن $\vec{n_p}$ لا يوازي $\vec{n_{p'}}$

لإثبات أن $(P)$ و $(P')$ متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}(1;1;1)$ شعاع توجيه له يكفي اثبات أن :

$B\in(P)$ و $B\in(P')$ وأن $\vec{u}\perp\vec{n_p}$ و $\vec{u}\perp\vec{n_{p'}}$

$B(3;1;2)\in(P)$ معناه $3(3)+2(1)-5(5)-1=0$

$B(3;1;2)\in(P')$ معناه $3+1-2(2)=0$

$\vec{u}\perp\vec{n_p}$ معناه $\vec{u}(1;1;1).\vec{n_p}(3;2;-5)=1(3)+1(2)+1(-5)=0$

$\vec{u}\perp\vec{n_{p'}}$ معناه $\vec{u}(1;1;1).\vec{n_{p'}}(1;1;-2)=1(1)+1(1)+1(-2)=0$

**2)أثبات أن $B$ هي المسقط العمودي لـ $A$ على $(P)$.**

$B$ هي المسقط العمودي لـ $A$ على $(P)$ معناه $\vec{AB}//\vec{n_p}$

$\vec{AB}//\vec{n_p}$ لأن $\vec{AB}=3\vec{n_p}$ أي $\vec{AB}$ و $\vec{n_p}$ مرتبطان خطيا

**3- أ)تبيّان أن المستويان $(P)$ و $(Q)$ متوازيان.**

$(P)//(Q)$ معناه $\vec{u_{1Q}}\perp\vec{n_p}$ و $\vec{u_{2Q}}\perp\vec{n_p}$

حيث : $\vec{u_{1Q}}(2;2;2)$ و $\vec{u_{2Q}}(-2;3;0)$ شعاعا توجيه $(Q)$

$\vec{u_{1Q}}\perp\vec{n_p}$ معناه $\vec{u_{1Q}}(2;2;2).\vec{n_p}(3;2;-5)=2.3+2.2+2.(-5)=0$

$\vec{u_{2Q}}\perp\vec{n_p}$ معناه $\vec{u_{2Q}}(2;-3;0).\vec{n_p}(3;2;-5)=2.3-3.2+0.-5=0$

**ب)التحقق أن $3x+2y-5z=58$ هي معادلة $(Q)$.**

$(P)//(Q)$ معناه $\vec{n_p}(3;2;-5)$ شعاع ناظم له ويشمل النقطة التي احداثياها $\omega(6;5;-6)$ نحصل عليها من أجل $t=0$ و $\lambda=0$ مثلا

وعليه $(Q)$ له معادلة من الشكل: $3x+2y-5z=d$

بعد تعويض $\omega$ في المعادلة نجد احداثياها $d=58$

أي $(Q)$ له معادلة ديكارتية من الشكل $3x+2y-5z=58$

**ج)التحقق أنّ النقطة $I$ تنتمي للمستوي $(Q)$ ثم استنتاج أن المستوي $(Q)$ هو المستوي المحوري للقطعة $[BA]$.**

لدينا: $I$ منتصف القطعة $[BA]$ معناه $I(\frac{15}{2};4;-\frac{11}{2})$

$I\in(Q)$ لأن: $3(\frac{15}{2})+2(4)-5(-\frac{11}{2})=58$

$(Q)$ مستوي محوري للقطعة $[BA]$ لأن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظم له ويشمل النقطة $I$ .

**4أ)تبيّان أن $(S)$ سطح كرة يطلب تحديد عناصرها المميزة**

$(S)$ هي مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ معناه $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}=0$

أي $M$ تنتمي لسطح الكرة التي قطرها $[BA]$

العناصر المميزة هي :

المركز النقطة $I$ ونصف القطر النقطة $R=IA=\frac{3\sqrt{38}}{2}$

**ب)استنتج ان المستوي $(Q)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.**

المستوي $(Q)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ وفق دائرة مركزها $I$ ونصف قطرها $R$ لأن $I\in(Q)$

**التمرين الرابع (07نقط)**

**I-أ)حساب $g(2)$ أتمام النهايات المنقوصة .**

$g(2)=e^{-2}+2$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x})+2=\lim_{t\to-\infty}(-te^{t})+2=2$

**ب)تعليل وجود عدد حقيقي وحيد $\alpha$ بحيث: يحقق:** $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$ : $g(\alpha)=0$

الدالة g متزايدة ومستمرة على المجال $]-1;2[$

لدينا: $g(-0,38)=-0.018$ و $g(-0,36)=0.05$

أي $g(-0,38)\times g(-0,36)\prec 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ بحيث: يحقق: $-0,38\prec\alpha\prec-0,36$ : $g(\alpha)=0$ .

**ج)استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ .**

نستنتج مما سبق ان اشارة $g(x)$ تكون كما يلي.

$x\in]-\infty;\alpha[$ معناه $g(x)\in]-\infty;0[$ أي $g(x)\prec 0$

$x\in]\alpha;+\infty[$ معناه $g(x)\in]0;2[$ أي $g(x)\succ 0$

**II-1)تبيّان أن:** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **و** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

ح.ع.ت $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1-xe^{-x})$

بوضع : $t=-x$ نجد: $\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty} t(-2+e^{t})+1=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})=\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$

**2) أ- تبيّان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=g(x)$**

$f'(x)=2+(-1)e^{-x}-e^{-x}(-x)=(x-1)e^{-x}+2=g(x)$

**استنتاج إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيراتها.**

بمأن $f'(x)=g(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | \| | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |

**2 )ب-تبيّان أن:** $f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$ **وحصرا لـ** $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$

ولدينا $g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$

معناه $e^{-\alpha}=\frac{2}{1-\alpha}$

ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=2\alpha+1+\frac{2\alpha-2+2}{\alpha-1}$

$=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$

الحصر: لدينا $-0,38\prec\alpha\prec-0,36.....(1)$

(1) تكافئ $-0,76\prec 2\alpha\prec-0,72.....(1)$

تكافئ $2,24\prec 2\alpha+3\prec 2,28.....(2)$

(1)تكافئ $-1,38\prec\alpha-1\prec-1,36.....(1)$

تكافئ $\frac{2}{-1,36}\prec\frac{2}{\alpha-1}\prec\frac{2}{-1,38}.....(3)$

من (2) و(3) نجد

$2,24-\frac{2}{1,36}\prec f(\alpha)\prec 2,28-\frac{2}{1,38}$

وأخيرا $0,78\prec f(\alpha)\prec 0,84$

**3) تبيّان $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيتّها.**

$(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف معناه " f تنعدم وتغير اشارتها

لدينا: $f'(x)=g(x)$ ومنه $f''(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}$

من حدول تغيرات g المعطى 'g تنعدم عند2 وتغير اشارتها

ومنه $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف إحداثياها $(2;5-2e^{-2})$

**4-أ-تبيّان أن $(C_f)$ يقبل مقاربا مائلا $(d)$:** $y=2x+1$

$(d)$ مقاربا مائلا لـ $(C_f)$ معناه $\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim_{u\to-\infty}(ue^{u})=0$

**ومنه $(C_f)$ يقبل المستقيم $(d)$ كمقارب مائل في جوار $+\infty$**

**دراسة الوضع النسبي لـ $(C_f)$ بالنسبة لـ $(d)$.**

ندرس أشارة الفرق $f(x)-y=(-xe^{-x})$

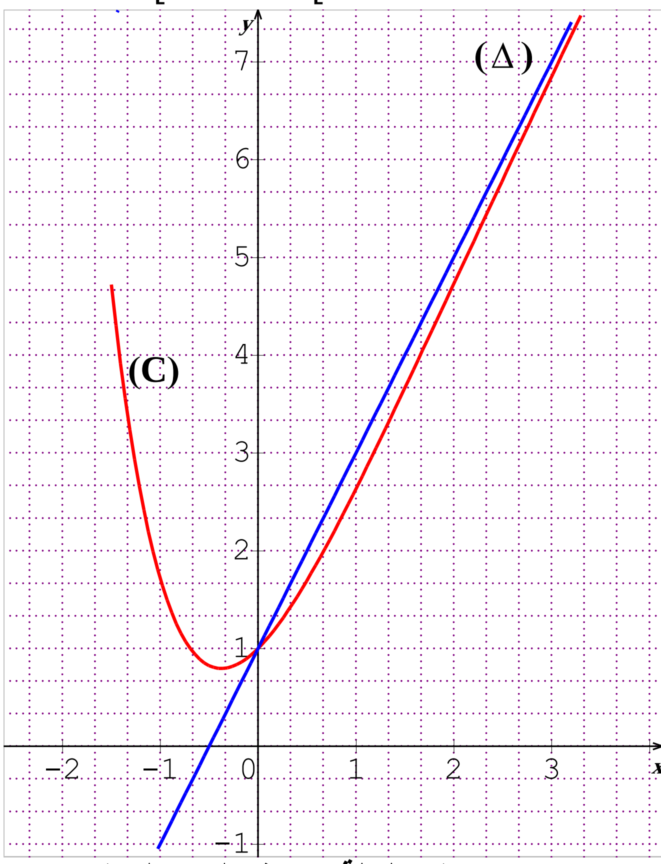
$f(x)-y=0$ معناه $-xe^{-x}=0$ ومنه $x=0$

$f(x)-y\succ 0$ معناه $-xe^{-x}\succ 0$ ومنه $x\prec 0$

$f(x)-y\prec 0$ معناه $-xe^{-x}\prec 0$ ومنه $x\succ 0$

نستنتج أن $(C_f)$ يكون تحت $(d)$.

**جـ-أنشاء $(C_f)$ على المجال $[-1,5;+\infty[$**




**5)استنتاج اتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها.**

لدينا: $h(x)=f(x^2.e^x)$

الدالة h مركبة من الدالة $x\mapsto x^2e^x$ متبوعة بالدالة f

$h'(x)=(x^2.e^x)'f'(x^2.e^x)$

وعليه:

$=(x^2.e^x)'g(x^2.e^x)=((x^2+2x)e^x)g(x^2.e^x)$

ومنه إشارة $h'(x)$ هي حسب إشارة $(x^2+2x).g(x)$

لكن إشارة $g(x)\succ 0$ لأن $g(\alpha)\succ 0$

ومنه إشارة $h'(x)$ هي حسب الدول التالي:

| x | $-\infty$ -2 | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(x^2+2x)$ | + | - | + |
| $g(x)$ | + | + | + |
| $h'(x)$ | + | - | + |

بعد حساب نهايات الدالة h عند $-\infty$ و $+\infty$ وحساب $h(-2)$ ، $h(0)$ يكون جدول تغيرات الدالة h كمايلي

| x | $-\infty$ | | -2 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h'(x) | | + | 0 | - | 0 | + | |
| h(x) | 1 | ↗ | $h(-2)$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

**6) أ-تعيّين العددين الحقيقين a و b**

k دالة أصلية للدالة $x\mapsto -xe^{-x}$ و $k(x)=(ax+b)e^{-x}$

ومنه : $k'(x)=(a)e^{-x}-(ax+b)e^{-x}$

$=(-ax+a-b)e^{-x}=-xe^{-x}$

بالمطابقة نجد: $a=1$ و $a-b=0$

ومنه : : $a=1$ و $b=1$

وعليه تكون عبارة $k(x)=(x+1)e^{-x}$

**ب- استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.**

لدينا: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ و التكن F دالة أصلية لها

ومنه: $F(x)=x^2+x+h(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي

ومنه: $F(x)=x^2+x+(x+1)e^{-x}+c$

ثانوية بوشوشة- الـــوادي　　　　﴿ شعبة: 3 علوم وتجريبية﴾

# الحل النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبيةدورة2013

المادة: الرياضيات　　　　الموضوع الثاني　　　　إعداد الأستاذ: بالعبيدي م العربي

**التمرين الأول** :( 4.5 نقط)

**1) حساب** $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$.

لدينا : $u_0 = 3$ و $n$ ، $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$.

ومنه: $u_1 = \dfrac{u_0 + 4(0) + 4}{3} = \dfrac{7}{3}$

$u_2 = \dfrac{u_1 + 4(1) + 4}{3} = \dfrac{31}{9}$

$u_3 = \dfrac{u_2 + 4(2) + 4}{3} = \dfrac{139}{27}$

**2- أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي** $n$ ، $u_n > 0$ **.**

*التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n = 0$ يكون لدينا: $u_0 > 0$ محققة لأن $u_0 = 3$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحّة $P(n+1)$

لدينا: $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ومنه: $u_n + 4n > 4n$

ومنه $u_n + 4n + 4 > 4n + 4$ ومنه:

$\dfrac{u_n + 4n + 4}{3} > \dfrac{4n+4}{3} \succ 0$ أذن $u_{n+1} > 0$

**ب)استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي** $n \geq 1$ ، $u_n > \dfrac{4}{3}n$

لدينا $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$ معناه $3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4$

معناه $3u_n = u_{n-1} + 4n$

معناه $u_{n-1} = 3u_n - 4n$

ومنه $3u_n - 4n \succ 0$ لأن $u_{n-1} \succ 0$ $(n \geq 1)$

إذن $u_n > \dfrac{4}{3}n$ و هو المطلوب.

**جـ) استنتاج نهاية المتتالية** $(u_n)$**.**

لدينا مما سبق أن $u_n > \dfrac{4}{3}n$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n > \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{3}n$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{3}n = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty$

وذلك حسب مبرهنة الحدّ من الأسفل

**3-أ)البرهان أن** $(v_n)$ **م.هـ و تعيين أساسها وحدها الأول**

$(v_n)$ م.هندسية معناه $v_{n+1} = q.v_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = \dfrac{u_n + 4n + 4}{3} - 2n - 1$

$v_{n+1} = \dfrac{u_n - 2n + 1}{3} = \dfrac{(v_n + 2n - 1) - 2n + 1}{3} = \dfrac{1}{3}v_n$

أي$(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2(0) + 1 = 4$

**ب) استنتاج أن** $u_n = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$ :.

لدينا: $v_n = u_n - 2n + 1$ ومنه $u_n = v_n + 2n - 1$

ومنه $u_n = v_0.q^n + 2n - 1 = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

**جـ)حساب بدلالة** $n$ **المجموع** $S_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + ...... + v_n = v_0\left[\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$$

لدينا:

$$= 4\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)}\right] = 6\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

**استنتاج بدلالة** $n$ **المجموع** $T_n$

$$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...... + u_n$$

ولدينا: $u_n = v_n + 2n - 1$ وعليه يكون $T_n$ كمايلي:

$$T_n = (v_0 + 2(0) - 1) + (v_0 + 2(0) - 1) + ...... + (v_n + 2(n) - 1)$$

$$T_n = (v_0 + v_1 + ..... + v_n) + 2(0 + 1 + ..... + n) - 1(n+1)$$

$$T_n = S_n + 2\dfrac{(n+1)(0+n)}{2} - 1(n+1)$$

وأخيرا $T_n = 6\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + n^2 - 1$

**التمرين الثاني** : ( **4.5 نقط**)

**1) كتابة معادلة لسطح الكرة** $S(A,AB)$

$(S)$ هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $MA^2=AB$

$(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=(3-1)^2+(1-0)^2+(0+2)^2$

أي معادلة $(S)$ هي: $(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2=9$

**2- بيان أن $(\Delta)$ مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة $B$**

نضع: $z=t$ حيث وسيط حقيقي

لدينا: $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases}$

الجملة تعني ان $(\Delta)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة $B$ .

**3-كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$**

$(P)$ يشمل النقطة $A$ و يعامد المستقيم $(\Delta)$ .

لدينا: $A\in(P)$ و $\vec{u}(-2;-1;1)$ شعاع ناظمي له

ومنه معادلة $(P)$ هي من الشكل: $-2x-y+z+d=0$

$A\in(P)$ معناه $d=2x_A+y_A-z_A=4$

ومنه $(P)$ له معادلة من الشكل: $-2x-y+z+4=0$

**4. أ-تعيين احداثيات نقطة تقاطع $(P)$ و $(\Delta)$ .**

احداثيات نقطة تقاطع $(P)$ و $(\Delta)$ هي حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x=-2t+3 \\ y=-t+1 \\ z=t \\ -2x-y+z+4=0 \end{cases}$$

ومنه: $-2(-2t+3)-(-t+1)+t+4=0$ تكافئ $t=\frac{1}{2}$

وعليه: $x=2$ ، $y=\frac{1}{2}$ و $z=\frac{1}{2}$

ومنه: إحداثيات نقطة تقاطع $(P)$ و $(\Delta)$ هي $H(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

**ب-حساب بعد النقطة A عن المستقيم $(\Delta)$**

بعد النقطة A عن المستقيم $(\Delta)$ هي الطول AH

لأن $(P)$ يعامد $(\Delta)$ في النقطة H

$d(A;\Delta)=AH=\sqrt{(1-2)^2+(0-\frac{1}{2})^2+(2+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

**جـ - استنتاج أن $(\Delta)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ في نقطتين**

$(\Delta)$ يقطع $(S)$ في نقطتين لأن $d(A;\Delta)\prec R$

**5- تبيان أن : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$ .**

لدينا: $G$ مرجح الجملة $\{(C;1),(B;e^t)\}$

ومنه G تحقق العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{GC}+e^t\overrightarrow{GB}=\vec{0}...(1)$

(1) تكافئ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+e^t\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

تكافئ $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$ .

**- تشكيل جدول تغيرات الدالة f**

لدينا: $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

لدينا: $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=1$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$

ولدينا: $f'(t)=\frac{-e^t}{(1+e^t)^2}\prec 0$ ومنه f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f

| t | $-\infty$ → $+\infty$ |
|---|---|
| f'(t) | - |
| f(t) | 1 ↘ 0 |

**- استنتاج مجموعة النقط $G$**

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$ نستنتج ان

مجموعة النقط G هي المستقيم الذي يشمل النقطة B ويوازي المستقيم (BC) عندما يمسح t المجموعة $\mathbb{R}$

حسب جدول التغيرات $t\in\mathbb{R}$ فإن $f(t)\in]0;1[$

وعليه مجموعة النقط $G$ عندما يتغير $t$ في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C .

**التمرين الثالث** ( **04نقط**)

**1-أ) اكتب $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ على الشكل الأسي .**

لدينا: $z_A=-2i=2(0-1i)=2e^{-\frac{\pi}{2}i}$

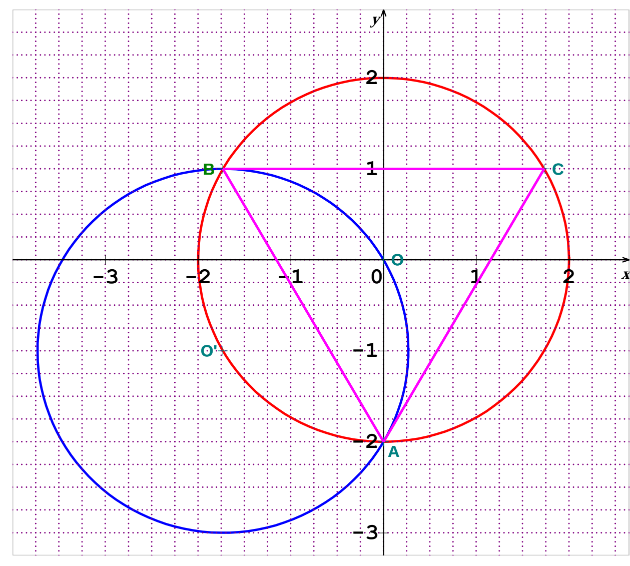
$z_B=-\sqrt{3}+i=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

$z_C=\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2e^{\frac{\pi}{6}i}$

**ب)استنتاج مركز ونصف قطر الدائرة (C)**

لدينا: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ ومنه النقط A ، B ، C تنتمي لدائرة واحدة مركزها O ونصف قطرها 2

ج) تعليم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ثم رسم الدائرة $(C)$




**2-أ)كتابة $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسي**

الشكل الجبري $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

بعد ضرب حدي الكسر في مرافق المقام نجد النتيجة

الشكل الأسي $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=e^{\frac{\pi}{3}i}$

**ب)استنتاج طبيعة المثلث $ABC$**

من الجواب السابق لدينا: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

ومنه: $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$

نستنتج أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

**3-أ) تبيان أن $O'$ صورة النقطة $O$ بالدوران $r$**

العبارة المركبة للدوران $r(A;\frac{\pi}{3})$ هي :

$z'=az+(1-a)z_A$ حيث: $a=e^{\frac{\pi}{3}i}$

ومنه:

$z_{O'}=az_O+(1-a)z_A=(1-a)z_A=-\sqrt{3}-i$

**ج)تبيان أن $[O'C]$ قطرا للدائرة $(C)$**

$O'C=|z_c-z_{O'}|=|2\sqrt{3}+2i|=\sqrt{16}=4$

**ج)التحقق أن $(C)$ و$(C')$ تشتركان في النقطتين $A$ و $B$**

يكفي التحقق من أن النقطتين $A$ و $B$ تنتميان للدائرة $(C')$

لدينا: $O'A=|z_A-z_{O'}|=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{4}=2$

$O'B=|z_B-z_{O'}|=|\sqrt{3}-i|=\sqrt{4}=2$

**التمرين الرابع ( 07نقط)**

**تشكيل جدول تغيرات g بقراءة بيانية .**

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ $-$ | ‖ $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-1$ ↘ $-\infty$ | ‖ $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**1) تبيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$**

الدالة g متزايدة ومستمرة على المجال $]0;+\infty[$

$g(1,07)\times g(1,09)\prec 0$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ بحيث:

يحقق: $1,07\prec\alpha\prec 1,09$ : $g(\alpha)=0$ .

**2)استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}^*$ .**

مما سبق نستنتج اشارة ان $g(x)$ تكون كما يلي.

$x\in]-\infty;\alpha[$ معناه $g(x)\in]-\infty;0[$ أي $g(x)\prec 0$

$x\in]\alpha;+\infty[$ معناه $g(x)\in]0;+\infty[$ أي $g(x)\succ 0$

**1)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ثم تفسير النتيجة الاخيرة هندسيا**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-3\frac{\ln|x|}{x^2})=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-3\frac{\ln|x|}{x^2})=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(2x-3\frac{\ln|x|}{x^2})=\lim_{x\to0}(-3\frac{\ln|x|}{x^2})=+\infty$$

إذن $(C_f)$ يقبل مستقيم كمقارب عمودي معادلته $x=0$

**2. أ- تبيان انه من $x\in\mathbb{R}^*$ :** $f'(x)=\frac{x.g(x)}{x^4}$

$$f'(x)=2-3\frac{\frac{1}{x}.x^2-2x.\ln|x|}{x^4}=\frac{2x^4-3x(1-2.\ln|x|)}{x^4}$$

$$=\frac{x(2x^3-3+6\ln|x|)}{x^4}=\frac{x.g(x)}{x^4}$$

**ب-استنتاج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات $f(x)$**

نستنتج أن اشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $x.g(x)$ و هي حسب الجدول التالي

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-$ | $-$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | | $+$ |

جدول تغيرات الدالة f

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | - | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | $+\infty \searrow f(\alpha)$ | $\nearrow +\infty$ | |

**جـ- تبيان ان** $f(\alpha)=3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}$ **واستنتاج حصرا لـ** $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha)=2\alpha-3\frac{\ln|\alpha|}{\alpha^2}$

$g(\alpha)=0$ معناه $2\alpha^3-3+6\ln|\alpha|=0$ أي $\ln|\alpha|=-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{2}$

ومنه: $f(\alpha)=2\alpha-\frac{3}{\alpha^2}\left(-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{2}\right)=3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}$

حصر $f(\alpha)$ نضع: $1,07\prec\alpha\prec1,09.....(1)$

$(1)$ تكافئ $3,21\prec3\alpha\prec3,27....(2)$

$(1)$ تكافئ $1,144\prec\alpha^2\prec1.188$ تكافئ $2,28\prec2\alpha^2\prec2,36.$

تكافئ $\frac{3}{2,36}\prec\frac{3}{2\alpha^2}\prec\frac{3}{2,28}....(3)$

من $(2)$ و$(3)$ نجد: $3,21-\frac{3}{2,28}\prec3\alpha-\frac{3}{2\alpha^2}\prec3,27-\frac{3}{2,36}$

وأخيرا $1,92\prec f(\alpha)\prec2,01$

**3. أ- بيان ان $(D)$ : $y=2x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$**

لدينا: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\to+\infty} 3\frac{\ln|x|}{x^2}=0$

ومنه $(C_f)$ يقبل المستقيم $(D)$ كمقارب مائل في جوار $\pm\infty$

**ب- ادرس وضعية لـ $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(D)$**

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=-3\frac{\ln|x|}{x^2}$

$f(x)-y=0$ معناه $\ln|x|=0$ معناه $|x|=1$ معناه $x=\pm1$

$f(x)-y\prec0$ معناه $\ln|x|\succ0$ معناه $|x|\succ1$ أي $x\succ1$ أو $x\prec-1$

$f(x)-y\succ0$ معناه $\ln|x|\prec0$ معناه $|x|\prec1$ أي $-1\prec x\prec1$

ومنه وضعية $(C_f)$ بالنسبة الى $(D)$ تكون كمايلي:

1) $x=\pm1$ معناه $(C_f)$ يقطع $(D)$ في نقطتين

2) $x\succ1$ أو $x\prec-1$ معناه $(C_f)$ تحت $(D)$.

3) $-1\prec x\prec1-\{0\}$ $(C_f)$ فوق $(D)$.

**4.أ- بيان وجود مماس $(\Delta)$ لـ $(C_f)$ يوازي $(D)$ ويمس $(C_f)$ في نقطتين .يطلب اعطاء معادلة لهذا المماس .**

نبين أن المعادلة $f'(x_0)=2$ تقبل حليّن متمايزين

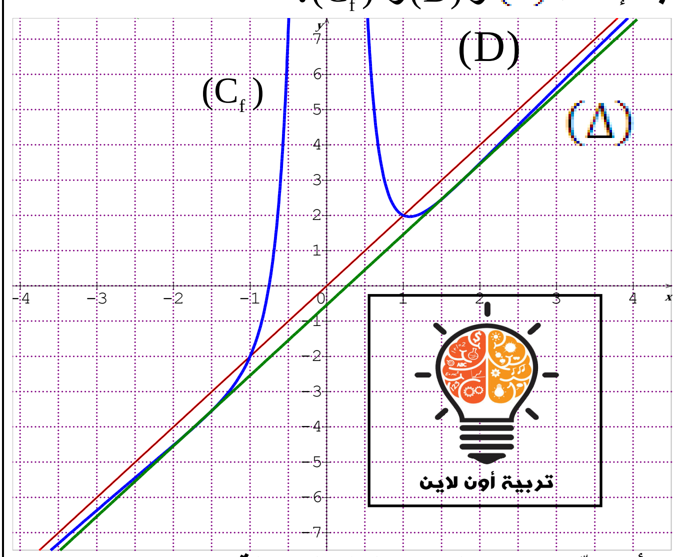
$f'(x_0)=2$ معناه $\frac{x_0.g(x_0)}{x_0^4}=2$ معناه $-3+6\ln|x_0|=0$

$-3+6\ln|x_0|=0$ معناه $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$

اعطاء معادلة لهذا المماس

$$(\Delta): y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})=2x-\frac{3}{2e}$$

**ب- إنشاء $(\Delta)$ و $(D)$ و$(C_f)$.**




**5.أ-تعيين عدد وإشارة حلول المعادلة:** $mx^2+3\ln x=0$

$mx^2+3\ln x=0......(*)$ تكافئ $m=-\frac{3\ln x}{x^2}$

$(*)$ تكافئ $x+m=f(x)$ تكافئ $y=f(x)$ و $y=x+m$

وعليه حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ والمستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ له نفس المنحى مع $(\Delta)$

من البيان نميز الحالات التالية

1) $m\prec-1,5e^{-1}$ المعادلة لا تقبل حلول.

2) $m=-1,5e^{-1}$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

3) $-1,5e^{-1}\prec m\prec-2$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب

4) $m\geq-2$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

**ب- تعيّن العددين الحقيقيين a ، b**

h الدالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln|x|}{x^2}$ معناه $h'(x)=\frac{\ln|x|}{x^2}$

ومنه $\frac{\ln|x|}{x^2}=\frac{b-a-b\ln|x|}{x^2}$ ومنه: $a=b=-1$

**استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$**

نسمي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

$F(x)=x^2-3h(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

| امتحان مقترح لتلاميذ السنة النهائية | الماد ة : رياضيات | الشعبة : رياضيات | المدة: 4 ساعات و 30دقيقة |
|---|---|---|---|

# الموضوع الأول:

## التمرين الأول :

لكل سؤال أربعة أجوبة مقترحة أحدها- فقط – صحيح، يطلب تحديده مع التبرير.

1 - في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$.

(أ) لا تقبل حلولا . (ب) حلولها زوجية .

( جـ ) حلولها تحقق $x \equiv 2\ [6]$ . (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$ .

2 –نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية : $24x + 34y = 2 \ldots(1)$ .

( أ ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(17k-7 ; 5-12k)$ .

( ب ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(-7k ; 5k)$ .

(جـ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(34k-7 ; 5-24k)$ .

( د ) المـعـادلة (1) لا تقبل حلولا .

3- N عدد طبيعي يكتب : $\overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5 .

العدد N يكتب في النظام ذي الأساس 6 بالشكل : (أ) $\overline{421}$ (ب) $\overline{111}$ (جـ) $\overline{303}$ (د) $\overline{222}$ .

4- باقي القسمة الإقليدية للعدد $1432^{2011}$ على العدد 3 هو : (أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 .

5- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $a = n(n+2)\ ,\ b = n+1$ .

بما أن: $b^2 - a = 1$ فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو : (أ) n (ب) n+1 (جـ) 1 (د) 2 .

## التمرين الثاني :

الجزءالأول:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^3 + 2z^2 - 16 = 0 \ldots\ldots (E)$ .

1)-أ- بين أن2 حل للمعادلة (E).

ب- أوجد الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل: $(z-2)(az^2+bz+c=0)=0$ .

جـ- اكتب حلول المعادلة (E) على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

الجزء الثاني:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1) علم النقاط: A ، B ، D ذات اللواحق: $z_A = -2-2i$ ، $z_B = 2$ ، $z_D = -2+2i$ .

2) احسب اللاحقة $z_C$ للنقطة C حيث ABCD متوازي أضلاع. علم النقطة C.

3) لتكن E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، ولتكن F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$ .

أ – احسب: $z_E$ ، $z_F$ لاحقتي النقطتين: E ، F على الترتيب.

ب – علـمّ النقطتين: E ، F .

4) أ – تحقق أن: $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ .

ب – استنتج طبيعة المثلث AEF.

## التمرين الثالث:

**الجزء الأول :** $g$ دالة عددية معرفة على المجال $D=]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$ .

**1-** أوجد نهايتي الدالة $g$ على يمين 0 و عند $+\infty$ .

**2-** ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

**3-** استنتج إشارة الدالة $g$ .

**الجزء الثاني :** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $D=]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$ .

$(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$ .

**1-** أ- أوجد نهايتي الدالة $f$ عند $+\infty$ و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية .

ب- بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ .

جـ - ادرس الوضع النسبي للمنحني $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

**2-** أ- تحقق أنه من أجل كل $x$ ينتمي إلى $D$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ – اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم $(T)$ الذي يمس المنحنى $(C)$ عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$ .

**3-** أثبت أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]\frac{1}{2};1[$ .

**4-** ارسم المنحني $(C)$ و المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$.

**الجزء الثالث:** نضع من أجل $x$ ينتمي إلى $D$: $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ .

**1-** احسب $h'(x)$ . ما ذا تستنتج ؟

**2-** أوجد بالسنتيمتر المربع $S$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C)$ وبالمستقيمات التي معادلاتها: $x=1\ ;\ x=e\ ;y=0$.

## التمرين الرابع :

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

**1-** نعتبر المستوي (P) المار بالنقطة B(1;-2;1) والشعاع $\vec{n}(-2;1;5)$ ناظمي له، و المستوي (R) الذي معادلته: x+2y-7=0.

أ- بين أن المستويين (P) و (R) متعامدان .

ب- برهن أن تقاطع المستويين (P) و (R) هو المستقيم (D) المار من النقطة C(-1;4;-1) و $\vec{u}(2;-1;1)$ شعاع توجيه له.

جـ - احسب d1 ،d2 ، d3 المسافات بين النقطة A(5;-2;-1) والمستويات (P) ، (R) ، (D) على الترتيب .

**2-** لتكن النقطة M( 1+2 t ; 3-t ; t ) حيث t عدد حقيقي و نعرف على $IR$ الدالة العددية $\phi$ كما يلي: $\phi(t)=\sqrt{6t^2-24t+42}$ .

أ- أثبت أن: $AM=\phi(t)$

ب-ادرس تغيرات الدالة $\phi$ .

جـ استنتج أن المسافة بين A و (D) هي $3\sqrt{2}$.

## التمرين الخامس :

نفرض في ما يلي أن n عدد طبيعي غير معدوم.

**1-** برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $1+5+9+\ldots+(4n-3)=2n^2-n$.

**2-** نعتبر المتتالية الحسابية $(u_n)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة ، كما يلي:

$$\begin{cases} u_2+u_4=18 \\ u_6+u_8+u_{10}+u_{12}=132 \end{cases}$$

- أوجد الأساس r و الحد الأول $u_1$ لهذه المتتالية ثم اكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

**3-** نضع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ . عبر عن $S_n$ بدلالة n .

# الموضوع الثاني :

**التمرين الأول:**

n عدد طبيعي .

1- ادرس بواقي القسمة الإقليدية للعدد $7^n$ على 9 .

2- عين قيم n التي من أجلها يكون العدد $16^{3n}+16^n-5$ قابلا القسمة على 9 .

3- أثبت أن العدد $7^n+3n+8$ من مضاعفات العدد 9 .

**التمرين الثاني:**

التمرين يحتوي على أربعة أسئلة، و لكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة ، المطلوب وضع العلامة (x) في المكان المناسب، و دون تبرير.

| رقم السؤال | نص السؤال | الإجابات المقترحة | صح | خطأ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | من أجل كل عدد حقيقي $\theta$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(e^{i\theta})^n$ يساوي : | $e^{in\theta}$ | | |
| | | $\cos(\theta)^n + i\sin(\theta)^n$ | | |
| | | $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ | | |
| 2 | القسم التخيلي للعدد المركب Z يساوي: | $\frac{Z+\overline{Z}}{2}$ | | |
| | | $\frac{Z-\overline{Z}}{2}$ | | |
| | | $\frac{Z-\overline{Z}}{2i}$ | | |
| 3 | Z عدد مركب قسمه الحقيقي x و قسمه التخيلي y . إذا كان Z تخيليا صرفا فإن: | $\|z\| = y^2$ | | |
| | | $\|z\| = -y^2$ | | |
| | | $\|z\| = -z^2$ | | |
| 4 | الأعداد المركبة $a;b;c$ لواحق النقط $A;B;C$ على الترتيب . من أجل $\frac{b-a}{c-a} = i\sqrt{3}$ لدينا: | $BC = 2AC$ | | |
| | | $\overline{CA}.\overline{CB} = CA^2$ | | |
| | | $(\overline{AB};\overline{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / (k \in Z)$ | | |

**التمرين الثالث:**

لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على $IR$ كما يلي: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق من أن: $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^{-x}+1}$ لكل $x$ من $IR$ واستنتج أن الدالة $f$ فردية.

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .

3) أ- بين أن من أجل كل $x$ من $IR$ : $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ .

ب-شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

جـ- حدد الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$ الذي معادلته : $y = 1 - \frac{1}{2}x$ .

4) أ- بين أن $(D)$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C)$.

ب- أنشئ المستقيم $(D)$ و المنحنى $(C)$.

5) أ - احسب مشتقة العبارة $x - \ln(e^x+1)$ من أجل كل $x$ من $IR$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $x=-1; x=0; y=1-\frac{1}{2}x$ .

**التمرين الرابع :**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستوي $(P)$ ذا المعادلة: $2x+y-2z+4=0$ و النقط $A(3;2;6)$ و $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

**1-** أ -تحقق أن المثلث $ABC$ قائم.

ب– بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ تعين المستوي $(P)$.

جـ- اكتب جملة معادلات وسيطية للمستقيم $(\Delta)$ المار بالنقطة $O$ و العمودي على المستوي $(P)$.

**2-** لتكن $L$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستوي $(P)$.

أ-احسب الطول $OL$.

ب-احسب $V$ حجم رباعي الوجوه $ABCO$.

**3 -** لتكن $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;1);(C;1);(O;3)\}$ و $E$ مركز ثقل المثلث $ABC$.

أ-أوجد إحداثيات النقطتين $G$ و $E$.

ب-تأكدأن $G$ منتصف $[OI]$.

جـ-حدد $d$ المسافة بين النقطة $G$ و المستوي $(P)$.

**4-** نشير بالرمز $(\Gamma)$ لمجموعة النقط $M$ من الفضاء والتي تحقق: $\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{OM}\|=6$.

أ-أثبت أن $(\Gamma)$ سطح كرة، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ب- ما هي مجموعة النقط المشتركة بين $(\Gamma)$ و $(P)$ ؟ ( مع التبرير).

## التمرين الخامس :

أربع متتاليات عددية $(t_n),(w_n),(v_n),(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n=3u_n+8v_n\ ;w_n=v_n-u_n\ ;v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4};u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3};v_0=12;u_0=1$$

**1-** برهن بالتراجع أن المتتالية $(t_n)$ ثابتة على $\mathbb{N}$.

**2-** بين أن $(W_n)$ متتالية هندسية، ثم اكتب $w_n$ بدلالة $n$.

**3-** تحقق أن $(U_n)$ متزايدة و $(V_n)$ متناقصة.

**4-** علما أن $(U_n)$ و $(V_n)$ متقاربتان، أوجد نهاية كل متتالية مما سبق.

**5-** ما ذا تستخلص من السؤالين 2 و 4 ؟

بالتوفيـــــق للجميـــــع (ب.ع)

# حل الموضوع الأول :

**حل التمرين الأول :**

**1-الجواب الصحيح هو (د).**

**<u>طريقة أولى</u>:**

يمكن أن نكتب: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$ معناه : $x^2 + x + 3 - 5x \equiv 0\ [5]$

منه : $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ [5]$

منه : $(x-1)(x-3) \equiv 0\ [5]$ ومنه : $x \equiv 1\ [5]$ أو $x \equiv 3\ [5]$

**<u>طريقة ثانية</u>:**

| باقي قسمة $(x)$ على5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| باقي قسمة $(x^2)$على5 | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |
| باقي قسمة $(x^2+x)$على5 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 |
| باقي قسمة $(x^2+x+3)$على5 | 3 | 0 | 4 | 0 | 3 |

حسب هذا الجدول فإن: $x \equiv 1\ [5]$ أو $x \equiv 3\ [5]$

**2-الجواب الصحيح هو (أ) .**

**<u>طريقة أولى</u>:**

القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 34 (و هو 2) من قواسم العدد2 ، فالمعادلة (1) تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة.

المعادلة (1) تكافئ المعادلة $12x + 17y = 1$ ...(2)

و لدينا: $12(17k-7)+17(5-12k)=204k-84+85-204k = 1$

<u>طريقة ثانية</u>: يمكن حل المعادلة (2) انطلاقا من حل خاص لها و باستعمال مبرهنة غوص.

<u>طريقة ثالثة</u>: يمكن حل المعادلة (2) باستعمال خواص الموافقة في مجموعة الأعداد الصحيحة.

**3-الجواب الصحيح هو(جـ).**

<u>طريقة أولى</u>: يمكن أن نكتب:

$N=\overline{421}^{5} = 1\times5^0+2\times5^1+4\times5^2=111$ و

$\overline{303}^{6} = 3\times6^0+0\times6^1+3\times6^2=111=N$ .

<u>طريقة ثانية</u>: $N=\overline{421}^{5} = 1\times5^0+2\times5^1+4\times5^2=111$ .

نكتب العدد 111 في النظام ذي الأساس 6 (حسب الجدول أسفله) فنجد:

$111=\overline{303}^{6}$.

| | المقسوم عليه | 6 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 111 | الحاصل | 18 | 3 | 0 |
| | الباقي | 3 | 0 | 3 |

**4- الجواب الصحيح هو (ب).**

لدينا: $1432^{2011} \equiv 1^{2011}\ [3]$ منه $1432^{2011} \equiv 1\ [3]$ و منه باقي قسمة $1432^{2011}$ على 3 هو 1 .

**5- الجواب الصحيح هو (جـ).**

<u>طريقة أولى</u>: يوجد عددان صحيحان $\alpha$ و $\beta$ بحيث: $\alpha a + \beta b = 1$ حيث $\alpha = n + 1$ و $\beta = n(n+2)$.

فحسب مبرهنة بيزو ، العددان a و b أوليان فيما بينهما ، أي أن : $pgcd(a,b)=1$ .

<u>طريقة ثانية</u>: إذا كان d القاسم المشترك للعددين a و b فإن d يقسم $a - b^2$ فهو يقسم 1 ومنه $d = 1$ .

**حل التمرين الثاني :**

**الجزء الأول:**

$(E) \qquad z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ .

**1)-أ- تبيين أن 2 حل للمعادلة (E) :**

لدينا: $(2)^3 + 2(2)^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$ .

**ب- إيجاد الأعداد الحقيقة a، b، c : لدينا:**

$(z-2)(az^2+bz+c = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$ .

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -16 \end{cases}$ منه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 8 \end{cases}$

**جـ-كتابة حلول المعادلة (E) على الشكلين الجبري و الأسي :**

المعادلة (E) تكافئ: $z = 2$ أو $z^2 + 4z + 8 = 0$ .

المعادلة $z^2 + 4z + 8 = 0$ مميزها: $\Delta = 4^2 - 4(8) = -16 = (4i)^2$ لها حلان مترافقان $z_1$ و $z_2$ حيث:

$z_1 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i\ ; z_2 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i$ .

حلول المعادلة (E) هي: -2+2i ;-2-2i; 2 (على الشكل الجبري).

لدينا: $\sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

بما أن 2 عدد حقيقي موجب تماما فإن: $2 = 2e^{i(0)} = 2e^{i(2\pi)}$ .

يمكن أن نكتب:

$$z_1 = -2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}} - \frac{-2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$$

$$z_2 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i(\pi-\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$$

**الجزء الثاني:**

**1) تعليم النقاط: A، B، D ذات اللواحق:** $z_A = -2-2i$ ، $z_B = 2$ ، $z_D = -2+2i$ :

**2) حساب اللاحقة $z_C$ للنقطة C حيث ABCD متوازي أضلاع، تعليم النقطة C:**

ABCD متوازي أضلاع معناه : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ حيث : $\overrightarrow{AB}(4;2)$ و منه :

$x_C + 2 = 4$ و $y_C - 2 = 2$ ، ومنه: $C(2;4)$ .

إذن: $z_C = 2 + 4i$ .

**3) أ –حساب: $z_E$ ، $z_F$ لاحقتي النقطتين: E، F على الترتيب:**

لدينا: $z_E - z_B = e^{i(-\frac{\pi}{2})}(z_C - z_B) = -i(4i) = 4$ منه:

$z_E = z_B + 4 = 6$ .

ولدينا: $z_F - z_D = e^{i(\frac{\pi}{2})}(z_C - z_D) = i(4+2i) = -2+4i$ منه:

$z_F = z_D - 2 + 4i = -4 + 6i$ .

**ب – تعليم النقطتين: E، F :**

**4) أ – التحقق أن:** $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ :

لدينا:

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{(-4+6i)-(-2-2i)}{(6)-(-2-2i)} = \frac{-2+8i}{8+2i} = \frac{i(2i+8)}{(8+2i)} = i$$ .

ب – استنتاج طبيعة المثلث AEF:

بما أن: $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ فإن : $AE = AF$ و $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{2}+2k\pi ; k\in Z$ .

إذن: المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين .

ملاحظة: نعتذر لكم عن عدم تمكننا من رسم الشكل حسب معطيات هذا التمرين.

## حل التمرين الثالث :

**الجزء الأول:** $D = ]0;+\infty[$ و $g(x) = x^2+1-\ln x$

1- أ- إيجاد نهايتي الدالة $g$ على يمين 0 و عند $+\infty$ :

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(x^2+1)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(-\ln x)=+\infty$ فإن:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} g(x)=+\infty$$

يمكن أن نكتب: $g(x)=x^2(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x})$ و بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2-دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ ثم تشكيل جدول تغيراتها :

$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$ . إشارة $g'(x)$ على $D$ من إشارة

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-\sqrt2}{2}$ | | $\frac{\sqrt2}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-1$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

$2x^2-1$ . $2x^2-1=0$ معناه: $x=\frac{-\sqrt2}{2}$ أو $x=\frac{\sqrt2}{2}$ .

الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{\sqrt2}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\sqrt2}{2};+\infty\right[$ حيث $g(\frac{\sqrt2}{2})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\approx 1.85$ .

| $x$ | 0 | | $\frac{\sqrt2}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $g(\frac{\sqrt2}{2})$ | ↗ | $+\infty$ |

3- استنتاج إشارة الدالة $g$:

للدالة $g$ قيمة حدية محلية صغرى عند النقطة ذات الإحداثيين $(\frac{\sqrt2}{2};\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2)$ و بما أن $g(\frac{\sqrt2}{2})>0$ فإن الدالة $g$ موجبة تماما.

**الجزء الثاني:** $D=]0;+\infty[$ و $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$ ،

$(C)$ تمثيلها البياني $(O;\vec i;\vec j)$ حيث . $\|\vec i\|=2cm$

1- أ-إيجاد نهايتي الدالة $f$ عند $+\infty$ و على يمين 0:

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(\frac{\ln x}{x})=-\infty$ فإن:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=-\infty$$

حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحنى $(C)$.

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{2})=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$ فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب- تبيين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+\frac{1}{2})]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

و هو المطلوب .

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$:

إشارة $f(x)-(x+\frac{1}{2})$ من إشارة $\ln x$ .

من أجل $x=1$ فإن : $\ln x=0$ و $(C)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة ذات الإحداثيين : $(1;\frac{3}{2})$ .

من أجل $x>1$ فإن : $\ln x>0$ و $(C)$ يقع تماما فوق $(\Delta)$

من أجل $0<x<1$ فإن: $\ln x<0$ و $(C)$ يقع تماما تحت $(\Delta)$

2-أ-التحقق أنه من أجل كل $x$ ينتمي إلى $D$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:

$$f'(x)=1+\frac{(\frac{1}{x})(x)-(1)(\ln x)}{x^2}=1+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب – استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ على مجموعة تعريفها ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

بما أن $g$ موجبة تماما على $D$ فإن $f'$ موجبة تماما على $D$ و منه $f$ متزايدة تماما على $D$ و جدول تغيراتها هو :

جـ- كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم $(T)$ الذي يمس المنحني $(C)$

عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$ : معادلة $(T)$ هي :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $f(1)=\frac{3}{2}$ و

$f'(1)=\frac{1^2+1-\ln 1}{1^2}=2$ منه : $y=2(x-1)+\frac{3}{2}$ و منه :

$(T): y=2x-\frac{1}{2}$ .

**3-إثبات أن المعادلة:** $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]\frac{1}{2};1[$ :

لدينا: $f(1)=\frac{3}{2}$ و $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{-\ln 2}{(\frac{1}{2})}=1-2\ln 2\approx-0.39$

.

الدالة $f$ مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[\frac{1}{2};1]$ و

$f(\frac{1}{2})\times f(1)<0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2};1[$ بحيث : $f(\alpha)=0$ .

**4- رسم المنحني $(C)$ والمستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ : (في الصفحة الأخيرة)**

**الجزء الثالث:** نضع من أجل $x$ ينتمي إلى $D$ :

$$h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

**1- حساب $h'(x)$ ، الاستنتاج:**

$h'(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2)(\ln x)(\frac{1}{x})=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}=f(x)$.

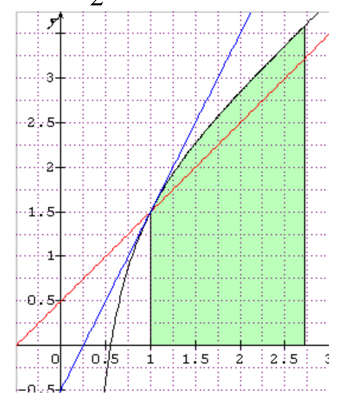
نستنتج أن الدالة $h$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $D$.

**2-إيجاد مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C)$ و بالمستقيمات التي معادلاتها:** $x=1\ ;\ x=e\ ;\ y=0$:

$$S=\int_1^e f(x)dx=4[h(x)]_1^e=4[h(e)-h(1)]\quad cm^2$$

حيث: $h(1)=1$ و $h(e)=\frac{e^2+e+1}{2}$ ،

إذن: $S=4\frac{e^2+e-1}{2}=2e^2+2e-2\approx18.21\ cm^2$ .



**حل التمرين الرابع :**

**1-أ- تبيين أن المستويين (P) و (R) متعامدان :**

$\vec{n'}(1;2;0)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاعان نظميان للمستويين (P) و (R) على الترتيب و $\vec{n}.\vec{n'}=(-2)(1)+(1)(2)+(5)(0)=0$ .

**ب- البرهان أن تقاطع المستويين (P) و (R) هو المستقيم (D) :**

**طريقة أولى:**

بما أن المستويين (P) و (R) متعامدان فإنهما متقاطعان وفق مستقيم . كي يكون هذا المستقيم هو (D) ، يكفي أن تتحقق الشروط التالية:

$C\in(P)$ و $C\in(R)$ و $\vec{u}.\vec{n}=0$ و $\vec{u}.\vec{n'}=0$ .

لدينا: $(-1)+2(4)-7=0$ منه: $C\in(R)$.

و لدينا:

$\vec{n}.\vec{BC}=(-2)(-2)+(1)(6)+(5)(-2)=0$

منه: $C\in(P)$.

و لدينا: $\vec{u}.\vec{n}=(2)(-2)+(-1)(1)+(1)(5)=0$ و

$\vec{u}.\vec{n'}=(2)(1)+(-1)(2)+(1)(0)=0$.

**طريقة ثانية:**

نكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

.

معادلة (P) على الشكل: $-2x+y+5z+\alpha=0$ و (P) يشمل النقطة **B(1;-2;1)** و منه : $-2(1)+(-2)+5(1)+\alpha=0$

و منه : $\alpha=-1$ و منه : $(P):-2x+y+5z+\alpha=0$

المستقيم (D) يتعين بالجملة التالية :

$$\begin{cases}-2x+y+5z-1=0...(1)\\ x+2y-7=0...(2)\end{cases}$$

من**(2)** نجد: $x=-2y+7$ ، وبالتعويض في **(1)** نجد:

$(4y-14)+y+5z-1=0$ ، و منه: $5y+5z-15=0$

و منه : $y+z-3=0$ ، ومنه : $z=-y+3$ .

إذن: $(D):\begin{cases}x=-2y+7\\ y=y\\ z=-y+3\end{cases}$ ، و بوضع: $y=-m$ نجد:

$$(D):\begin{cases}x=2m+7\\ y=-m\\ z=m+3\end{cases}$$

نلاحظ أن $\vec{u}(2;-1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(D)$ الذي يشمل النقطة **C(-1;4;-1)** و الموافقة لـ: $m=4$.

**طريقة ثالثة:**

نتحقق أن المستويين (P) و (R) يشملان المستقيم المار من **C(-1;4;-1)** و يوازي $\vec{u}(2;-1;1)$.

الجملة: $\begin{cases}x=2\alpha-1\\ y=-\alpha+4\\ z=\alpha-1\end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم المار من **C(-1;4;-1)** و يوازي $\vec{u}(2;-1;1)$ ، حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

نلاحظ أن: $-2(2\alpha-1)+(-\alpha+4)+5(\alpha-1)-1=0$ و $(2\alpha-1)+2(-\alpha+4)-7=0$ و هو المطلوب.

**جـ - حساب d1 ، d2، d3 المسافات بين النقطة A(5;-2;-1) و (P) ، (R) ، (D) على الترتيب :**

$$d_1=\frac{|-2(5)+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{18\sqrt{30}}{30}=\frac{3\sqrt{30}}{5}\approx3.286$$

$$d_2 = \frac{|(5)+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(0)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2.683$$

$$d_3 = \sqrt{(d_1)^2 + (d_2)^2} == \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 3.242$$

**2-أ- إثبات أن:** $AM = \phi(t)$ **:**

**لدينا :** $AM = \sqrt{[(1+2t)-5]^2 + [(3-t)-(-2)]^2 + [t-(-1)]^2}$ **منه :**

$$AM = \sqrt{(2t-4)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2}$$

**و منه :** $AM = \sqrt{4t^2 - 16t + 16 + 25 - 10t + t^2 + t^2 + 2t + 1}$ **و منه :**

$AM = \sqrt{6t^2 - 24t + 42}$ **و هو المطلوب .**

**ب- حساب** $\phi'(t)$ **:**

$$\phi'(t) = \frac{12t-24}{2\sqrt{6t^2-24t+42}} = \frac{6t-12}{\sqrt{6t^2-24t+42}}$$

**جـ- تشكيل جدول تغيرات الدالة** $\phi$ **، تفسير هندسي للقيمة الحدية الصغرى للدالة** $\phi$ **:**

**للدالة** $\phi$ **قيمة حدية محلية صغرى هي**

$\phi(2) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 3.242$ **وتمثل المسافة بين النقطة** **A(5;-2;-1)المستقيم (D) .**

**د-استنتاج إحداثيي النقطة** $H$ **المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم(D) :**

**النقطة** $H$ **هي موضع النقطة M( 1+2 t ; 3-t ; t ) عندما t =2 و منه:** $H(5;1;1)$ **.**

**حل التمرين الخامس :**

**1- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :**
**1+5+9+…+(4n-3)=2n²-n**

**من أجل n=1 فإن المساواة: 1=2(1)²-(1) محققة.**

**نفرض صحة المساواة 1+5+9+…+(4n-3)=2n²-n ، ونبين صحة المساواة**

**1+5+9+…+(4n-[4(n+1)-3]  =2(n+1)²-(n+1)**
**. 3)+**

**أي نبين أن: 1+5+9+…+(4n-3)+(4n+1)=2n²+3n+1.**

**بالفعل، 1+5+9+…+(4n-3)+(4n+1)= <u>1+5+9+…+(4n-3)</u>+(4n+1)= <u>2n²-n</u>+(4n+1)= 2n²+3n+1.**

**2-إيجاد الأساس r و الحد الأول** $u_1$ **لهذه المتتالية ثم كتابة** $u_n$ **بدلالة n :**

**لدينا:**
$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 18 \\ u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} = 132 \end{cases}$$

**يمكن أن نكتب:**

$u_2 = u_1 + r; u_4 = u_1 + 3r; u_6 = u_1 + 5r; u_8 = u_1 + 7r; u_{10} = u_1 + 9r; u_{12} = u_1 + 11r$.

**بالتعويض في الجملة أعلاه نجد :**
$$\begin{cases} 2u_1 + 4r = 18 \\ 4u_1 + 32r = 132 \end{cases}$$ **منه**

$$\begin{cases} u_1 + 2r = 9 \ldots(1) \\ u_1 + 8r = 33 \ldots(2) \end{cases}$$

**بطرح (1)من (2) نجد** $6r = 24$ **منه** $r = 4$ **. و بالتعويض في (1) نجد** $u_1 = 9 - 2r = 1$.

**لدينا :** $u_n = u_1 + (n-1)r = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$ .

**3-التعبير عن** $S_n$ **بدلالة n :**

**طريقة أولى:**

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = 2n^2 - n$$

**طريقة ثانية:**

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(1 + 4n - 3) = \frac{n(4n-2)}{2} = n(2n-1) = 2n^2 - n$$
.

## حل الموضوع الثاني :

**حل التمرين الأول:**

**1- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7ⁿ على 9 :**

**لدينا:** $7^0 \equiv 1\,[9]$ **و** $7^1 \equiv 7\,[9]$ **و** $7^2 \equiv 4\,[9]$ **و** $7^3 \equiv 1\,[9]$ **.**

**من أجل n=3k فإن** $7^{3k} \equiv 1\,[9]$ **و من أجل n=3k+1 فإن** $7^{3k+1} \equiv 7\,[9]$ **و من أجل n=3k+2 فإن** $7^{3k+2} \equiv 4\,[9]$ **.**

**2- تعيين قيم n:**

$16^{3n}+16^n-5$ **يقبل القسمة على 9 معناه :** $16^{3n}+16^n-5 \equiv 0\,[9]$ **منه :** $1+7^n-5 \equiv 0\,[9]$ **منه :** $7^n \equiv 4\,[9]$ **منه : n=3k+2 حيث k عدد طبيعي .**

**3-إثبات أن العدد** $7^n+3n+8$ **من مضاعفات العدد 9: نبين أن:** $7^n+3n+8 \equiv 0\,[9]$ **.**

**طريقة أولى**

| قيمة n | 3k | 3k+1 | 3k+2 |
|---|---|---|---|
| قيمة 3n | 9k | 9k+3 | 9k+6 |
| باقي قسمة $7^n$ على 9 | 1 | 7 | 4 |
| باقي قسمة 3n على 9 | 0 | 3 | 6 |
| باقي قسمة $7^n$+ 3n على 9 | 1 | 1 | 1 |
| باقي قسمة $7^n$+ 3n+8 على 9 | 0 | 0 | 0 |

**طريقة ثانية**

| 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 3 | 6 |
| 4 | 1 | 7 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

## حل التمرين الثاني :

التمرين يحتوي على أربعة أسئلة، و لكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة، المطلوب وضع العلامة (x) في المكان المناسب، و دون تبرير.

| رقم السؤال | نص السؤال |
|---|---|
| 1 | من أجل كل عدد حقيقي $\theta$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ العدد $(e^{i\theta})^n$ يساوي : |
| 2 | القسم التخيلي للعدد المركب $Z$ يساوي: |
| 3 | $Z$ عدد مركب قسمه $x$ الحقيقي و قسمه التخيلي $y$ . إذا كان $Z$ تخيليا صرفا فإن: |
| 4 | الأعداد المركبة $c;b;a$ لواحق النقط $C;B;A$ على الترتيب . من أجل $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$ فإن: |

## حل التمرين الثالث :

لدينا: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و $D=IR$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

**1- التحقق من أن:** $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل $x$ من $IR$ واستنتاج أن الدالة $f$ فردية:

لدينا:

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^{-x}+1}\times\frac{e^x}{e^x}=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1+e^x-1}{1+e^x}=1-\frac{1}{e^x+1}$$

أو

$$1-\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\frac{1}{e^{-x}+1}$$

من أجل $x\in IR$ ، $-x\in IR$ و

$$f(-x)+f(x)=2-2(\frac{1}{e^{-x}+1}+\frac{1}{e^x+1})=2-2[(1-\frac{1}{e^x+1})+\frac{1}{e^x+1}]=2-2(1)=0$$

و هو المطلوب .

**2-حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ :

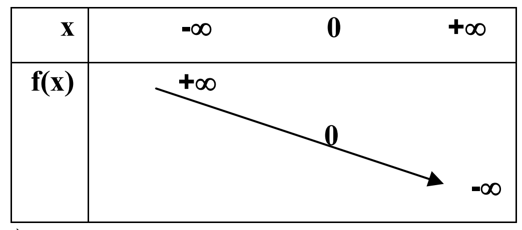
بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{2}x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{e^x+1})=0$ فإن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ منه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ .

**3- أ- تبيين أن:** $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}-2[\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}]=\frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}=\frac{-e^{2x}-2e^x-1+4e^x}{2(e^x+1)^2}=\frac{-e^{2x}+2e^x-1}{2(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}=\frac{-1}{2}(\frac{e^x-1}{e^x+1})^2$$

**ب-إعطاء جدول تغيرات الدالة** $f$ :



| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ |

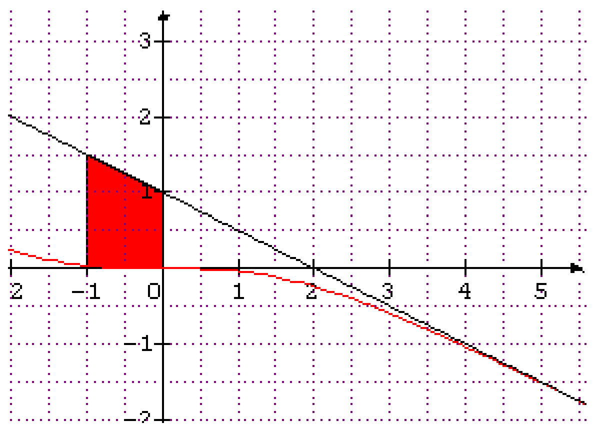
**جـ- تحديد الوضع النسبي للمنحنى** $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$ الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ :

لدينا: $f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)=\frac{-2}{e^x+1}<0$ منه : $(C)$ يقع تحت $(D)$ .

**4) أ-تبيين أن المستقيم** $(D)$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$ :

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{e^x+1}=0$ و هو المطلوب .

**ب-إنشاء** $(C)$ و $(D)$:




**5) أ - حساب مشتقة العبارة** $x-\ln(e^x+1)$ من أجل كل

$x$ من $IR$ ثم استنتاج دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ على $IR$ :

لدينا: $[x-\ln(e^x+1)]' = 1-\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x+1}$ . منه :

$x \mapsto x-\ln(e^x+1)$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ على $IR$ .

ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني

$(C)$ والمستقيم $(D)$ و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=-1$ ،

$x=0$ :

إذا كانت S هذه المساحة فإن:

$$S=\int_{-1}^{0}[(1-\frac{1}{2}x)-f(x)]dx=\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^x}dx=2\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx=2[x-\ln(e^x+1)]_{-1}^{0}\approx 1.24u.a$$ .

**حل التمرين الرابع:**

$(P): 2x+y-2z+4=0$ ، $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$ .

**1- أ – التحقق أن المثلث ABC قائم:**

**طريقة أولى:**

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;0;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-4;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(3;-4;1)$ .

منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)(1)+(0)(-4)+(-2)(-1)=0$ و هو المطلوب .

**طريقة ثانية:** $AB^2=4+0+4=8$ و $AC^2=1+16+1=18$ و $BC^2=9+16+1=26$

نلاحظ أن : $AB^2+AC^2=BC^2$ و حسب مبرهنة فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم في A .

ب- تبيين أن النقط A و B و C تعين المستوي $(P)$ :

بما أن ABC مثلث فإن النقط A و B و C تعين مستويا. نتحقق أن المستوي $(P)$ يشمل النقط A و B و C.

بالفعل، $2(3)+(2)-2(6)+4=0$ و $2(1)+(2)-2(4)+4=0$ و $2(4)+(-2)-2(5)+4=0$ .

جـ-كتابة جملة معادلات وسيطية للمسقيم $(\Delta)$ المار بالنقطة O و العمودي على المستوي $(P)$ :

المستقيم $(\Delta)$ يشمل O و يوازي $\vec{n}(2;1;-2)$ الشعاع النظم للمستوي $(P)$ .

إذن الجملة التالية هي تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ :

$$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$$ و $t\in IR$ .

**2- أ-حساب الطول OL :**

OL يمثل بعد النقطة O عن المستوي $(P)$ . منه :

$OL=\dfrac{\|2(0)+(0)-2(0)+4\|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{3}$ .

ب-إيجاد V حجم رباعي الوجوه ABCO :

حجم رباعي الوجوه ABCO قاعدته المثلث ABC القائم في A مساحتها $\dfrac{AB\times AC}{2}$ و ارتفاعه $[OL]$.

لدينا: $V=\dfrac{1}{3}(\dfrac{AB\times AC}{2})\times OL$ منه:

$V=\dfrac{1}{3}(\dfrac{2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2})\times\dfrac{4}{3}$ و منه: $V=\dfrac{8}{3}$ .

**3 - أ-إيجاد إحداثيات النقطتين G و E :**

لدينا: $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+3x_O}{1+1+1+3}=\dfrac{(3)+(1)+(4)+3(0)}{6}=\dfrac{4}{3}$ و $y_G=\dfrac{(2)+(2)+(-2)+3(0)}{6}=\dfrac{1}{3}$ و $z_G=\dfrac{(6)+(4)+(5)+3(0)}{6}=\dfrac{5}{2}$ .

و لدينا:

$x_E=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{(3)+(1)+(4)}{3}=\dfrac{8}{3}$ و $y_E=\dfrac{(2)+(2)+(-2)}{3}=\dfrac{2}{3}$ و $z_E=\dfrac{(6)+(4)+(5)}{3}=5$ .

إذن: $G(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2})$ و $E(\frac{8}{3};\frac{2}{3};5)$ .

ب-التأكدأن G منتصف $[OE]$:

**طريقة أولى:** حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(E;3);(O;3)\}$ منه G منتصف $[OE]$.

**طريقة أخرى:** نلاحظ $\overline{OE}=2\overline{OG}$ .

جـ-تحديد d المسافة بين النقطة G و المستوي $(P)$ :

لدينا : $d=\dfrac{|2(\frac{4}{3})+(\frac{1}{3})-2(\frac{5}{2})+4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{3}$ .

**4- أ-إثبات أن $(\Gamma)$ سطح كرة، تعيين مركزها و نصف قطرها:**

$\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{OM}\|=6$ معناه: $\|6\overrightarrow{GM}\|=6$ منه: $GM=1$ .

إذن: $(\Gamma)$ سطح كرة مركزها G و نصف قطرها $R=1$

ب- مجموعة النقط المشتركة بين $(\Gamma)$ و $(P)$ : بما أن المسافة بين G مركز الكرة التي سطحها $(\Gamma)$ و المستوي $(P)$ أصغر تماما من نصف قطرها $(d<R)$ فإن $(\Gamma)$ و $(P)$ متقاطعان في دائرة.

**حل التمرين الخامس :**

**1-البرهان بالتراجع أن المتتالية $(t_n)$ ثابتة على N :**

من أجل $n=0$ لدينا : $t_0=3u_0+8v_0=99$ .

نفرض أن: $t_n=99$ و نبين أن: $t_{n+1}=99$ .

لدينا:

$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=(u_n+2v_n)+(2u_n+6v_n)=3u_n+8v_n=t_n=99$ .

**2-تبيين أن $(W_n)$ متتالية هندسية ، ثم كتابة $w_n$ بدلالة n :**

لدينا:

$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}-\dfrac{u_n+2v_n}{3}=\dfrac{3u_n+9v_n-4u_n-8v_n}{12}=\dfrac{v_n-u_n}{12}=\dfrac{1}{12}w_n$ .

منه : $(W_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{12}$ و حدها الأول

$w_0=v_0-u_0=11$ . منه :

$w_n=w_0\times q^n=11\times(\dfrac{1}{12})^n$ .

**3-التحقق أن $\left(U_n\right)$ متزايدة و $\left(V_n\right)$ متناقصة:**

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{2v_n-2u_n}{3}=\frac{2}{3}w_n>0$ و $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{u_n-v_n}{4}=\frac{-1}{4}w_n<0$ .

**4-إيجاد نهاية كل متتالية:**

**بما أن $\left(t_n\right)$ متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$ فإن نهايتها هي $t_0$ و منه:**

$\lim_{n\to+\infty} t_n=99$ .

**بما أن $\left(W_n\right)$ متتالية هندسية أساسها ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فإن نهايتها هي 0 أي** $\lim_{n\to+\infty} w_n=0$ .

**لدينا:** $t_n=3u_n+8v_n\,;w_n=v_n-u_n$. **فإذا رمزنا بـ :** $a$ **و** $b$ **لنهايتي المتتاليتين $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ على الترتيب فإن :**

**منه:** $\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty} t_n\\ \lim_{n\to+\infty}(u_n+3v_n)=\lim_{n\to+\infty} w_n\end{cases}$ **و منه :** $\begin{cases}(b-a)=0\\ (3a+8b)=99\end{cases}$

$a=b=9$ **أي :** $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} u_n=9$ .

**5-استخلاص : المتتاليتان $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و لهما نفس النهاية ، فهما متجاورتان .**

## البكالوريا التجريبي في مـــــادة الـــريـــاضــيـــات

السنة الثالثة علوم تجريبية　　　　　الـــمـــدة : 03 ســاعات و 30 د

إختر أحد الموضوعين التاليين

## الموضوع الأول

### التمرين الأول (5pts) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1,-1,4)$ ، $B(7,-1,-2)$ ، $C(1,5,-2)$ .

$(\Delta)$ المستقيم ذي التمثيل الوسيطي : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2-2t \\ z = -3-2t \end{cases}$

1) أ) بين أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ليست في استقامية و أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

ب) بين أن $\vec{n}(1,1,1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ ثم عين معادلة له.

2) أ) بين أن $(\Delta)$ عمودي على $(ABC)$.

ب) عين $G$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(ABC)$ ثم بين أن $G$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$.

3) $(S)$ سطح الكرة ذي المركز $G$ ويشمل $A$ .

أ) عين معادلة لـ $(S)$.

ب) أدرس تقاطع $(S)$ و $(\Delta)$ .

### التمرين الثاني (6pts) :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ .

1) $g$ دالة معرفة على المجال $]-\infty,+\infty[$ بـ : $g(x) = e^x + x + 1$ .

أ) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$ . استنتج إشارة $g(x)$ .

2) $f$ دالة معرفة على المجال $]-\infty,+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$ . نسمي $(C)$ المنحني الممثل للدالة $f$ .

أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

ب) بين أن $(C)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ عند $+\infty$ معادلته $y = x$ . حدد وضعية $(C)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$.

جـ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ، عين إشارة $f'(x)$ .شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

د) بين أن: $f(\sim) = \sim + 1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\sim)$ . أنشئ $(\Delta)$ ، $(C)$.

### التمرين الثالث (5pts) :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$S$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها $z$ ، النقطة $M'$ من المستوي لاحقتها $z'$ حيث:
$z' = (1+i)z + 2$ . $A$ و $\Omega$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z_A = -2+2i$ ، $z_\Omega = 2i$ .

1) أ) عين طبيعة التحويل $S$ وعناصره المميزة.

ب) عين $z_B$ و $z_C$ لاحقتي $B$ و $C$ على الترتيب حيث: $A = S(B)$ و $C = S(A)$

2) أ) من أجل $M \neq \Omega$ ، بين أن : $\dfrac{z'-z}{z_\Omega - z} = -i$ . فسر بيانيا هذه النتيجة.

ب) استنتج طريقة لإنشاء النقطة $M'$ انطلاقا من النقطة $M$ .

3) أ) عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ حيث : $|z+2-2i|=\sqrt{2}$. تحقق أن $B$ نقطة من $(\Gamma)$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد مركب $z$ : $z'+2=(1+i)(z+2-2i)$.
جـ) بين أنه إذا كانت $M$ نقطة من $(\Gamma)$ فإن $M'$ هي نقطة من دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

## التمرين الرابع (4pts) :

1) $f$ دالة معرفة على $[0,1]$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$ . أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

2) $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{2u_n+1}$ .
أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<1$.
ب) أدرس تغيرات المتتالية $(u_n)$. استنتج أنها متقاربة.

3) $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$ .
أ) بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 3. عين $v_n$ بدلالة $n$.
ب) لستنتج $u_n$ بدلالة $n$. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول (4pts) :

عين الجواب الصحيح (معللا إختيارك) من بين الاقتراحات $A$ ، $B$ ، $C$ في كل حالة من الحالات التالية:
المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1) $z$ عدد مركب حيث $z=\dfrac{2+4i}{2-i}$ | $M$ صورة $z$ هي نقطة من الدائرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها 4 | $z=\overline{z}$ | $z$ هو عدد مركب تخيلي صرف |
| 2) $z$ عدد مركب حيث $z=\sqrt{3}-i$ | $-\dfrac{7\pi}{6}$ هو عمدة لـ $z$ | $-\dfrac{\pi}{6}$ هو عمدة لـ $-\overline{z}$ | $\dfrac{2\pi}{3}$ هو عمدة لـ $-z^2$ |
| 3) $z=(1+i)^{2014}$ | $z$ هو عدد مركب تخيلي صرف | $z$ هو عدد حقيقي موجب | $z$ هو عدد حقيقي سالب |
| 4) $z$ عدد مركب حيث $z^2-z\overline{z}-1=0$ | للمعادلة حل وحيد | للمعادلة حلين متمايزين | ليس للمعادلة حل |

## التمرين الثاني (5pts) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(8,0,8)$ ، $B(10,3,10)$ ، $C\left(-4,1,-\dfrac{1}{5}\right)$ .

$(\Delta)$ المستقيم ذي التمثيل الوسيطي : $(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-5+3k \\ y=1+2k \\ z=-2k \end{cases}$

1) أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$ .
ب) بين أن المستقيمين $(AB)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي.

2) $(P)$ المستوي الموازي لـ $(\Delta)$ ويشمل $A$ و $B$ .
أ) بين أن $\vec{n}(2,-2,1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ ثم عين معادلة له.
ب) بين أنه من أجل كل نقطة $M$ من $(\Delta)$ فإن المسافة بين $M$ و $(P)$ ثابتة.

3) أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ الذي يشمل النقطة $C$ و $\vec{n}(2,-2,1)$ شعاع توجيه له.

ب) بين أن $(D)$ يقطع $(AB)$ في النقطة $G\left(\frac{18}{5},-\frac{33}{5},\frac{18}{5}\right)$ و يقطع $(\Delta)$ في النقطة $H\left(-\frac{22}{5},\frac{7}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

جـ) عين معادلة لسطح الكرة $(S)$ الذي يمس $(AB)$ في $G$ و يمس $(\Delta)$ في $H$.

## التمرين الثالث (6pts) :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ $\|\vec{i}\|=2cm$)

لتكن الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=-3-\ln x+\frac{1}{x}$

ولتكن الدالة $f$ المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=e^{-x}(3+\ln x)$. نسمي $(C)$ المنحني الممثل للدالة $f$.

1) أ) أدرس تغيرات الدالة $g$.

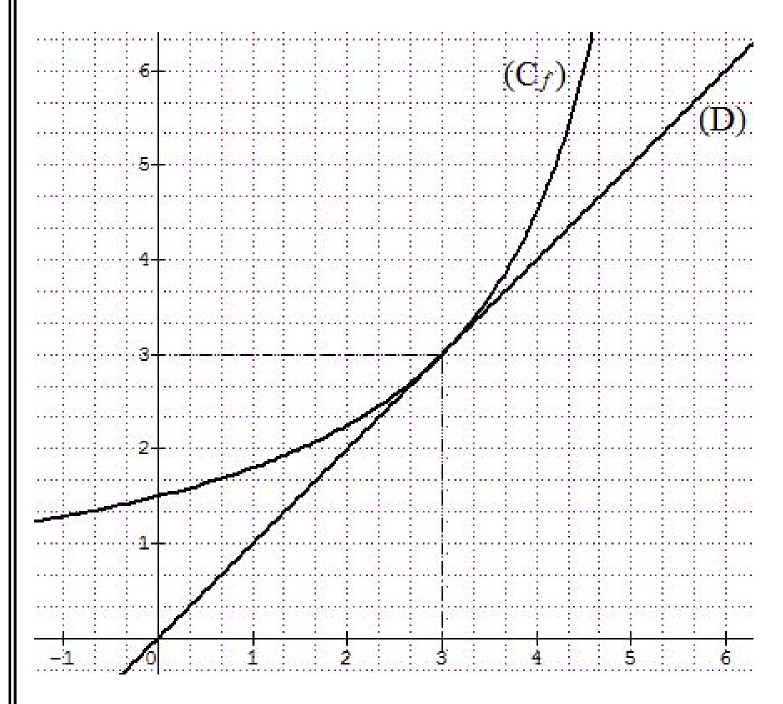
ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $]0,+\infty[$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,45<\alpha<0,46$. استنتج إشارة $g(x)$.

2) أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (لاحظ أن $f(x)=3e^{-x}+\frac{x}{e^x}\times\frac{\ln x}{x}$). فسر النتيجتين بيانيا.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ : $f'(x)=e^{-x}g(x)$ ، استنتج عندئذ إشارة $f'(x)$.
شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

4) لحساب $f(\alpha)$ ، نأخذ $\alpha\approx 0,45$. أنشئ $(C)$.

## التمرين الرابع (5pts) :




في الشكل المقابل رسمنا $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ المعرفة على المجال $]-\infty,6[$ بـ: $f(x)=\frac{9}{6-x}$،
ورسمنا $(D)$ المماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 3.

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{9}{6-u_n} \end{cases}$

1) أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير $(u_n)$ ونهايتها.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ :
$0<u_n<3$.

ب) أدرس اتجاه تغير $(u_n)$.

جـ) استنتج أن $(u_n)$ متقاربة.

3) $(w_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $w_n=\frac{1}{u_n-3}$.

أ) بين أن $(w_n)$ متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{3}$. استنتج عبارة $w_n$ ثم عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

ب) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.



تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا وعطلة سعيدة

## تصحيح الموضوع الأول:

### تصحيح التمرين الأول:

1) أ) $\overrightarrow{AB}(6,0,-6)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,6,-6)$ ، $\overrightarrow{BC}(-6,6,0)$.

لا يوجد عدد $k$ يحقق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ومنه $A$ ، $B$ ، $C$ ليست في استقامية.

$AB=AC=BC=6\sqrt{2}$ ، إذن $ABC$ متقايس الأضلاع.

ب) لدينا $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ ، إذن $\vec{n}(1,1,1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ ، معادلة له: $x+y+z-4=0$

2) $\vec{u}(-2,-2,-2)$ شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ ، $\vec{u}=-2\vec{n}$ أي $\vec{u}\ //\ \vec{n}$

ومنه $\vec{u}$ ناظمي لـ $(ABC)$ أي $(\Delta)\perp(ABC)$ . $(\Delta)$ يقطع $(ABC)$ معناه $-2t-2-2t-3-2t-4=0$ ، $t=-\frac{3}{2}$ ،

$G(3,1,0)$ . احداثيات مركز ثقل $ABC$:

$\left(\frac{1+7+1}{3},\frac{-1-1+5}{3},\frac{4-2-2}{3}\right)$ أي هي $(3,1,0)$.

3) نصف قطر $(S)$ : $GA=2\sqrt{3}$ ،

$(S):(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=12$ $(\Delta)$ يقطع $(S)$ معناه

$(-2t-3)^2+(-2-2t-1)^2+(-3-2t)^2=12$

أي $12t^2+36t+15=0$ ، أي $t=-\frac{1}{2}$ أو $t=-\frac{5}{2}$ أي $(\Delta)$ يقطع $(S)$

في النقطتين: $E(1,-1,-2)$ ، $F(5,3,2)$

### تصحيح التمرين الثاني:

1) $g'(x)=e^x+1>0$

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | + |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

$g(-1,28)=-0,002<0$

$g(-1,27)=0,011>0$

... مبرهنة القيم المتوسطة...

إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | 0 | + |

2) أ) لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $(C)$ يقبل مستقيم مقارب عند $-\infty$ معادلته $y=0$ .

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=0$ ،

$(C)$ يقبل مستقيم مقارب عند $+\infty$ معادلته $y=x$ .

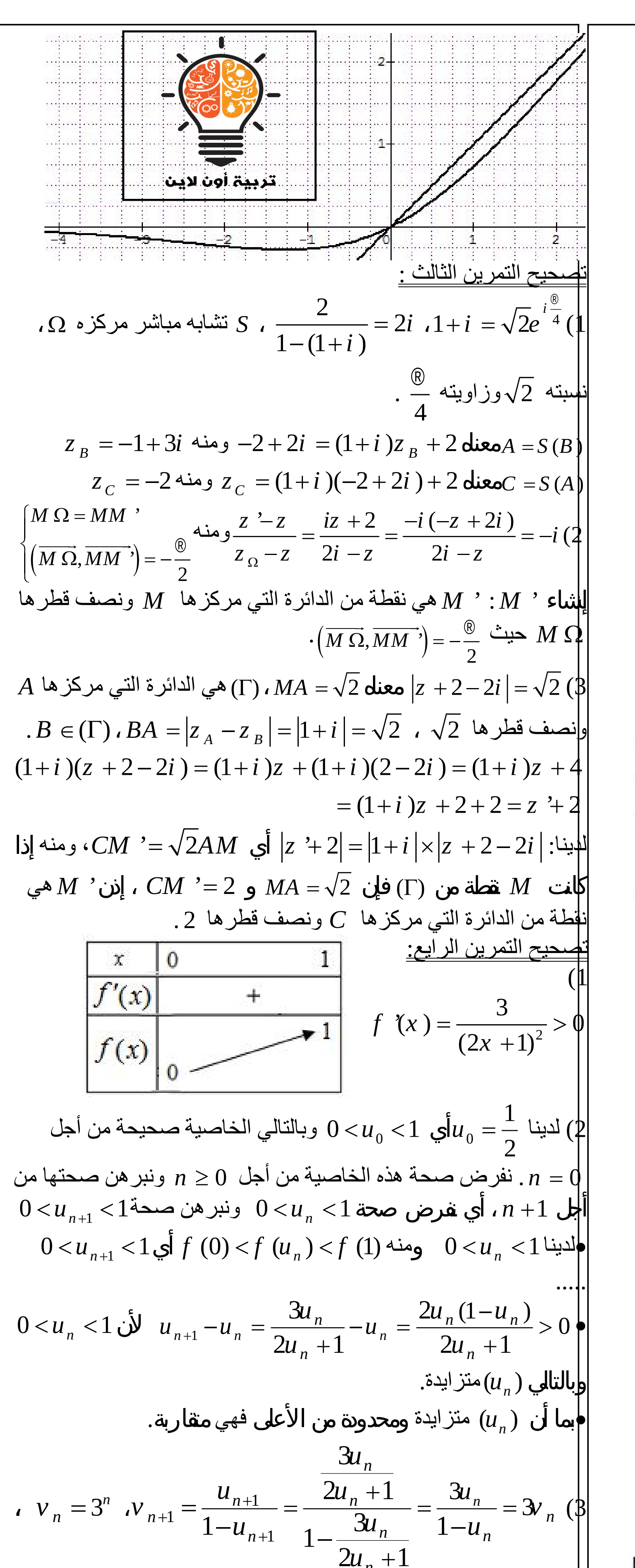
| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-x$ | + | | $-$ |
| $e^x+1$ | + | 0 | + |
| $[f(x)-x]=\frac{-x}{e^x+1}$ | + | 0 | $-$ |
| الوضعية | $(C)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C)$ تحت $(\Delta)$ |

$f'(x)=\frac{e^x(1+x)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^xg(x)}{(e^x+1)^2}$

$g(\alpha)=0$ معناه $e^{\alpha}=-\alpha-1$ ومنه

$f(\alpha)=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1}=\alpha+1$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | + |
| $f(x)$ | 0 ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |




### تصحيح التمرين الثالث:

1) $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $\frac{2}{1-(1+i)}=2i$ ، $S$ تشابه مباشر مركزه $\Omega$ ،

نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ .

$A=S(B)$ معناه $-2+2i=(1+i)z_B+2$ ومنه $z_B=-1+3i$

$C=S(A)$ معناه $z_C=(1+i)(-2+2i)+2$ ومنه $z_C=-2$

2) $\frac{z'-z}{z_\Omega-z}=\frac{iz+2}{2i-z}=\frac{-i(-z+2i)}{2i-z}=-i$ ومنه $\begin{cases}M\Omega=MM'\\(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'})=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

إنشاء $M'$ : $M'$ هي نقطة من الدائرة التي مركزها $M$ ونصف قطرها $M\Omega$ حيث $(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'})=-\frac{\pi}{2}$ .

3) $|z+2-2i|=\sqrt{2}$ معناه $MA=\sqrt{2}$ ، $(\Gamma)$ هي الدائرة التي مركزها $A$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ، $BA=|z_A-z_B|=|1+i|=\sqrt{2}$ ، $B\in(\Gamma)$ .

$(1+i)(z+2-2i)=(1+i)z+(1+i)(2-2i)=(1+i)z+4$

$=(1+i)z+2+2=z'+2$

لدينا: $|z'+2|=|1+i|\times|z+2-2i|$ أي $CM'=\sqrt{2}AM$ ، ومنه إذا كانت $M$ نقطة من $(\Gamma)$ فإن $MA=\sqrt{2}$ و $CM'=2$ ، إذن $M'$ هي نقطة من الدائرة التي مركزها $C$ ونصف قطرها 2 .

### تصحيح التمرين الرابع:

1) $f'(x)=\frac{3}{(2x+1)^2}>0$

| $x$ | 0 1 |
|---|---|
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | 0 ↗ 1 |

2) لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<1$ وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ . نفرض صحة هذه الخاصية من أجل $n\geq 0$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نفرض صحة $0<u_n<1$ ونبرهن صحة $0<u_{n+1}<1$

• لدينا $0<u_n<1$ ومنه $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي $0<u_{n+1}<1$

....

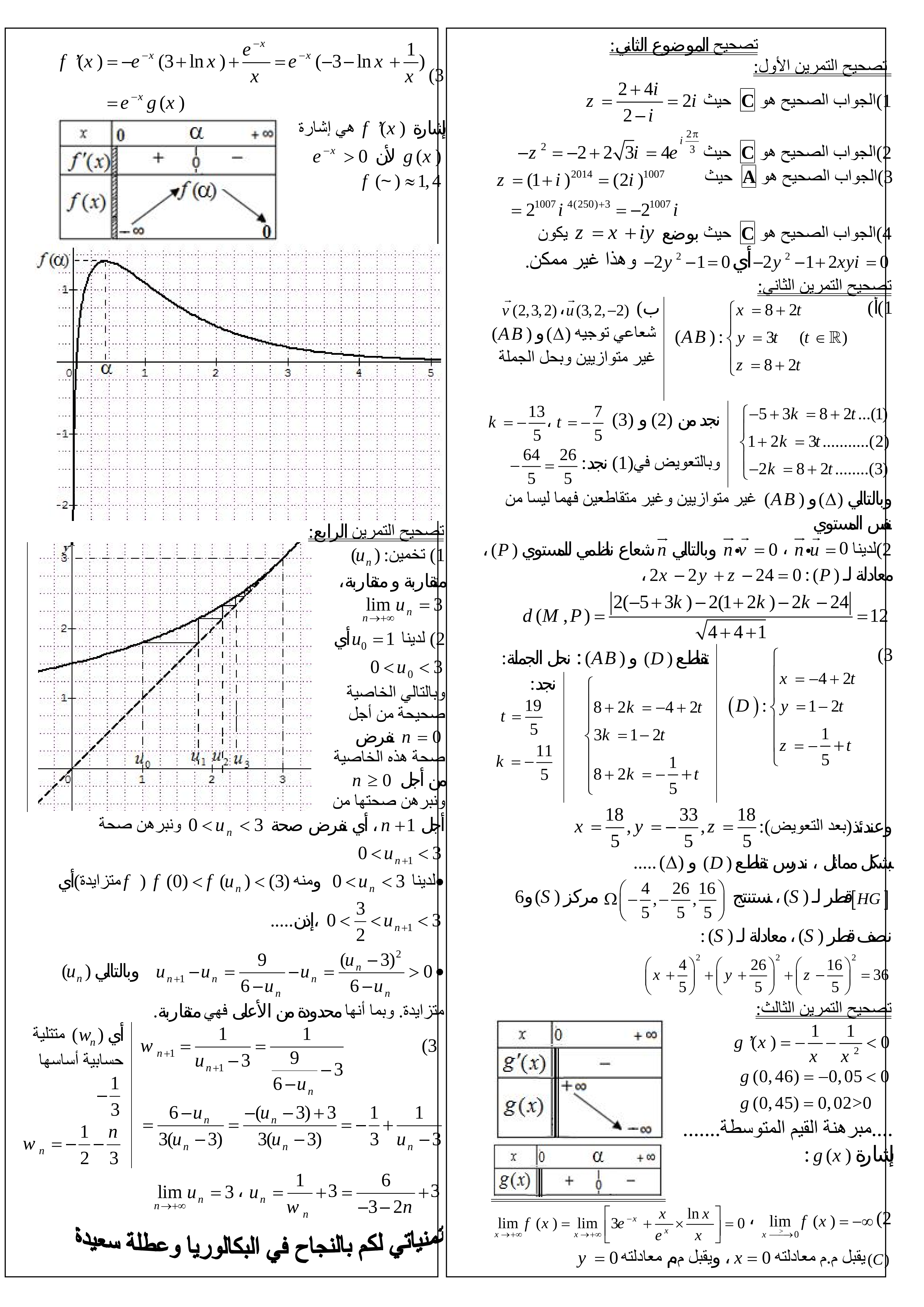
• $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}>0$ لأن $0<u_n<1$

وبالتالي $(u_n)$ متزايدة.

• بما أن $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\frac{\frac{3u_n}{2u_n+1}}{1-\frac{3u_n}{2u_n+1}}=\frac{3u_n}{1-u_n}=3v_n$ ، $v_n=3^n$ ،

$u_n=\frac{v_n}{1+v_n}=\frac{3^n}{1+3^n}$ ، $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{1+3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3^n}+1}=1$



تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

1) الجواب الصحيح هو **C** حيث $z=\frac{2+4i}{2-i}=2i$

2) الجواب الصحيح هو **C** حيث $-z^2=-2+2\sqrt{3}i=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) الجواب الصحيح هو **A** حيث $z=(1+i)^{2014}=(2i)^{1007}$

$=2^{1007}i^{4(250)+3}=-2^{1007}i$

4) الجواب الصحيح هو **C** حيث بوضع $z=x+iy$ يكون $-2y^2-1+2xyi=0$ أي $-2y^2-1=0$ وهذا غير ممكن.

تصحيح التمرين الثاني:

1) أ) $(AB):\begin{cases}x=8+2t\\ y=3t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=8+2t\end{cases}$

ب) $\vec{u}(3,2,-2)$ ، $\vec{v}(2,3,2)$ شعاعي توجيه $(\Delta)$ و $(AB)$ غير متوازيين وبحل الجملة

$\begin{cases}-5+3k=8+2t \;...(1)\\ 1+2k=3t \;...........(2)\\ -2k=8+2t \;........(3)\end{cases}$

نجد من $(2)$ و $(3)$ $t=-\frac{7}{5}$ ، $k=-\frac{13}{5}$

وبالتعويض في $(1)$ نجد: $\frac{26}{5}=-\frac{64}{5}$

وبالتالي $(\Delta)$ و $(AB)$ غير متوازيين وغير متقاطعين فهما ليسا من نفس المستوي

2) لدينا $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ ، $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ وبالتالي $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$،
معادلة لـ $(P): 2x-2y+z-24=0$ ،

$$d(M,P)=\frac{|2(-5+3k)-2(1+2k)-2k-24|}{\sqrt{4+4+1}}=12$$

3) $(D):\begin{cases}x=-4+2t\\ y=1-2t\\ z=-\frac{1}{5}+t\end{cases}$

تقاطع $(D)$ و $(AB)$: نحل الجملة:

$\begin{cases}8+2k=-4+2t\\ 3k=1-2t\\ 8+2k=-\frac{1}{5}+t\end{cases}$

نجد: $t=\frac{19}{5}$ ، $k=-\frac{11}{5}$

وعندئذ(بعد التعويض): $x=\frac{18}{5},y=-\frac{33}{5},z=\frac{18}{5}$

بشكل مماثل ، ندرس تقاطع $(D)$ و $(\Delta)$.....

$[HG]$ قطر لـ $(S)$، نستنتج $\Omega\left(-\frac{4}{5},-\frac{26}{5},\frac{16}{5}\right)$ مركز $(S)$ و6 نصف قطر $(S)$، معادلة لـ $(S)$:

$$\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{26}{5}\right)^2+\left(z-\frac{16}{5}\right)^2=36$$

تصحيح التمرين الثالث:

$g'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}<0$

| $x$ | $0$   $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ |

$g(0,46)=-0,05<0$

$g(0,45)=0,02>0$

....مبرهنة القيم المتوسطة.......

إشارة $g(x)$:

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[3e^{-x}+\frac{x}{e^x}\times\frac{\ln x}{x}\right]=0$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$

$(C)$ يقبل م.م معادلته $x=0$ ، ويقبل مم معادلته $y=0$

3) $f'(x)=-e^{-x}(3+\ln x)+\frac{e^{-x}}{x}=e^{-x}(-3-\ln x+\frac{1}{x})$

$=e^{-x}g(x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأن $e^{-x}>0$

$f(\alpha)\approx 1,4$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

تصحيح التمرين الرابع:

1) تخمين: $(u_n)$ متزايدة ومتقاربة، $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$

2) لدينا $u_0=1$ أي $0<u_0<3$ وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ نفرض صحة هذه الخاصية من أجل $n\geq 0$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي نفرض صحة $0<u_n<3$ ونبرهن صحة $0<u_{n+1}<3$

• لدينا $0<u_n<3$ ومنه $f(0)<f(u_n)<f(3)$ ($f$ متزايدة) أي $0<\frac{3}{2}<u_{n+1}<3$ ، إذن.....

• $u_{n+1}-u_n=\frac{9}{6-u_n}-u_n=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}>0$ وبالتالي $(u_n)$ متزايدة. وبما أنها محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) $w_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}=\frac{-(u_n-3)+3}{3(u_n-3)}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{u_n-3}$

أي $(w_n)$ متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{3}$

$w_n=-\frac{1}{2}-\frac{n}{3}$

$u_n=\frac{1}{w_n}+3=\frac{6}{-3-2n}+3$ ، $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$

**تمنياتي لكم بالنجاح في البكالوريا وعطلة سعيدة**

ثانوية بن الهيثم البيض | السنة الدراسية : 2011 – 2012
القسم : الثالثة تقني رياضي | المدة :4 ساعات ونصف

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار واحد من الموضوعين

## الموضوع الأول

**التمرين الأول :** الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ . النقط A ، B و C إحداثياتها على الترتيب : $A(1\,;\,-2\,;\,4)$ ، $B(-2\,;\,-6\,;\,5)$ و $C(-4\,;\,0\,;\,-3)$

1) a) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

b) بين أن الشعاع $\vec{n}\,(1\,;\,-1\,;\,-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

c) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2 ) a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل مبدأ المعلم O وعمودي على المستوي (ABC) .

b) عين إحداثيات النقطة O′ المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

3) نرمز بـ H للمسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) و t إلى العدد الحقيقي الذي يحقق : $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

a) أثبت أن : $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

b) استنتج قيمة t ثم إحداثيات النقطة H .

**التمرين الثاني :**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)z + 1 = 0$

( نرمز بـ $z_A$ للحل الذي جزؤه التخيلي موجب و $z_B$ للحل الثاني )

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس المباشر $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ( الوحدة : 4 cm)

نرمز بـ A ، B ، C للنقط التي لواحقها على الترتيب $z_A$ ، $z_B$ ، $\mathbf{z_C = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$

a) تحقق أن : $(z_A)^2 = z_C$

b) اكتب $z_C$ على شكله الأسي ثم استنتج الشكل الأسي لـ $z_A$

c) استنتج أن : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3) نرمز بـ r للدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O وزاويته $\frac{\pi}{8}$

a) تحقق أن النقطة C صورة النقطة A بالدوران r

b) علم النقط A ، B ، C

4) a) نرمز بـ E إلى صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{1}{2}$ . تحقق أن $z_E = \frac{1}{2}z_B$

b) عين $z_G$ لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OBC .

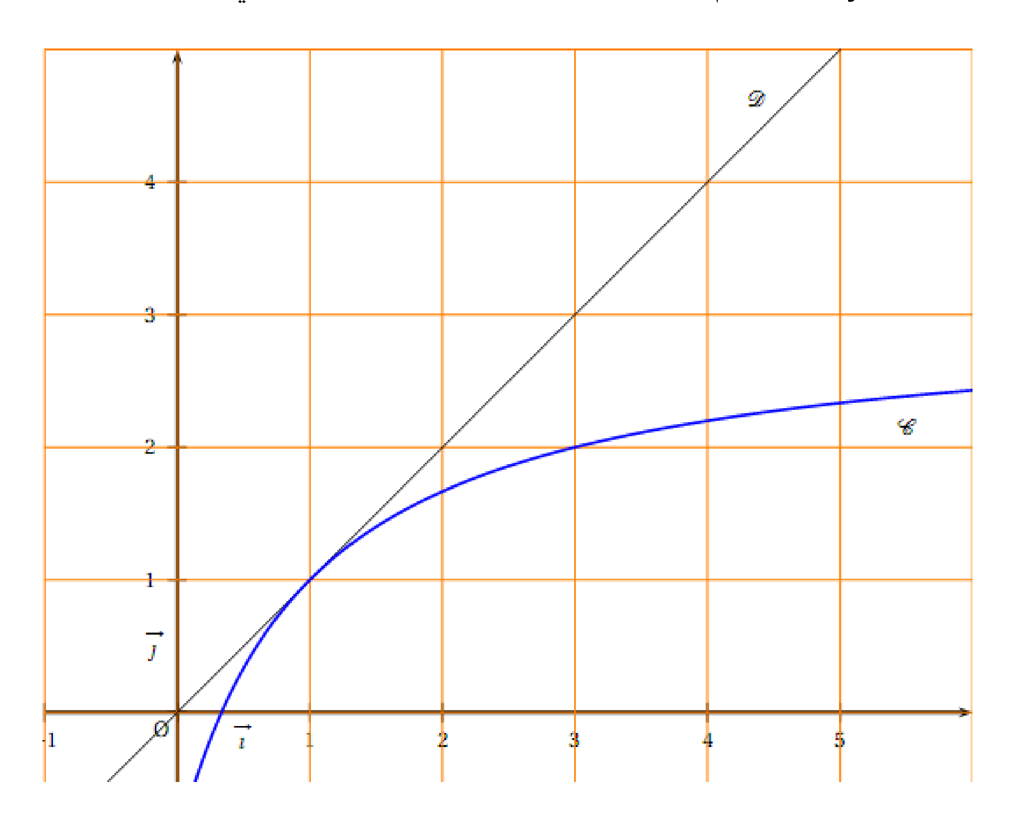
c) تحقق أن $\frac{z_G - z_C}{z_E - z_C}$ حقيقيا . أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=3-\frac{4}{x+1}$.

نعتبر المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) المنحنى $\mathscr{C}$ الممثل للدالة $f$ و المستقيم $\mathscr{D}$ ذو المعادلة $y=x$. معطى كما يلي :




a) مثل باستعمال ورقة الرسم على محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ مظهرا خطوط الرسم .

b) ضع تخمينا فيما يتعلق باتجاه تغير المتتالية$(u_n)$ وتقاربها

2) a) برهن باستعمال البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geqslant 1$

b) بين أن الدالة f متزايدة على $]-1;+\infty[$ . استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

c) تأكد من صحة التخمين 1) b) ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)$ .

التمرين الرابع : تعطى المعادلة $(E): 11x-7y=5$ ، حيث $x$ ، $y$ عدد ان صحيحان .

1) a) تحقق أن الثنائية (10 ,15) حلا للمعادلة (E) .

b) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) .

c) عين عدد الثنائيات $(x\,,y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق الشرطين : $0 \leq x \leq 50$ و $0 \leq y \leq 50$

2) نعتبر المعادلة $(F): 11x^2-7y^2=5$ ، حيث $x$ ، $y$ عدد ان صحيحان .

a) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (F) فإن $x^2 \equiv 2y^2[5]$ .

b) $x$ ، $y$ عدد ان صحيحان ، انقل على ورقة الاجابة وأكمل الجدولين :

| إذا كان $x$ يوافق | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| فإن $x^2$ يوافق | | | | | | [5] |

| إذا كان $y$ يوافق | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| فإن $2\,y^2$ يوافق | | | | | | [5] |

c) استنتج أنه إذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (F) فإن $x$ و $y$ مضاعفان للعدد 5 .

3) أثبت أنه إذا كان $x$ و $y$ مضاعفان للعدد 5 فإن الثنائية $(x\,,y)$ ليست حلا للمعادلة (F) . ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة للمعادلة (F) ؟

## الموضوع الثاني :

التمرين الأول : حدد صحة أو خطأ كل اقتراح من الاقتراحات المعطاة مع التبرير.

يعطى في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ النقطة $A(-1 ; -1 , 1)$ والمستقيمين $\mathscr{D}$ و $\mathscr{D}'$ المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين : $t \in \mathbb{R}$ ، $t' \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{D}\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \mathscr{D}'\begin{cases} x = 3t' \\ y = t'+2 \\ z = 3t'-2 \end{cases}$$

الاقتراح الأول : النقطة A تنتمي إلى المستقيم $\mathscr{D}$

الاقتراح الثاني : المستوي العمودي على $\mathscr{D}$ ويشمل النقطة A معادلته $2x - 3y + z = 0$

الاقتراح الثالث : المستقيمان $\mathscr{D}$ و $\mathscr{D}'$ متعامدان

الاقتراح الرابع : المستقيمان $\mathscr{D}$ و $\mathscr{D}'$ لا ينتميان إلى نفس المستوي .

الاقتراح الخامس : المسافة بين النقطة A والمستوي ذو المعادلة $2x - 3y + z = 0$ هي $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

التمرين الثاني : المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس المباشر $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ( الوحدة : 2 cm)

نرمز بـ $J$ للنقطة ذات اللاحقة $i$ .

1) نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $H$ لواحقها على الترتيب $a = -3 - i$ ، $b = -2 + 4i$ ، $c = 3 - i$ و $h = -2$ .
علم هذه النقط على الرسم .

2) بين أن النقطة $J$ مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

3) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{b-c}{h-a}$ . استنتج أن المستقيمين $(AH)$ و $(BC)$ متعامدين .

في بقية التمرين نقبل أن النقطة $H$ هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث $ABC$ .

4) نرمز بـ $G$ إلى مركز ثقل المثلث $ABC$ . عين g لاحقة $G$ ثم علم النقطة $G$ على الرسم .

5) بين أن النقط $J$ ، $H$ و $G$ على استقامة واحدة . تحقق من ذلك على الرسم .

6) نرمز بـ $A'$ إلى منتصف القطعة $[BC]$ وبـ $K$ إلى منتصف القطعة $[AH]$. النقطة $A'$ لاحقتها $a' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

a) عين لاحقة النقطة $K$ .

b) بين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع .

التمرين الثالث : نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

1) احسب $u_2$ ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)$ ليست لاحسابية ولاهندسية .

2) نعرف المتتالية $(v_n)$ كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

a) احسب $v_0$ .

b) عبر عن $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$ .

c) استنتج أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ . d) عبر عن $v_n$ بدلالة $n$ .

3) نعرف المتتالية $(w_n)$ كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ .

a) احسب $w_0$ .

b) باستعمال المساواة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن $w_{n+1}$ بدلالة $u_n$ و $v_n$.

c) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_{n+1} = w_n + 2$. .

d) عبر عن $w_n$ بدلالة $n$ .

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5) نضع من أجل عدد طبيعي $n$ : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ .

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي $n$ : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ .

<u>التمرين الرابع :</u> من أجل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر الدالة $f_n$ المعرفة على IR كمايلي : $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

نرمز بـ $\mathscr{C}_n$ للمنحنى الممثل للدالة $f_n$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس .

<u>الجزء A</u> : دراسة الدالة $f_1$ المعرفة على IR بـ : $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$ .

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$.

2) a) بين أن المنحنى $\mathscr{C}_1$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل منهما .

b) بين أن الدالة $f_1$ متزايدة تماما على IR .

c) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $0 < f_1(x) < 4.$

3) a) بين أن النقطة $I_1$ ذات الإحداثيتين $(\ln 7 ; 2)$ مركز تناظر للمنحنى $\mathscr{C}_1$ .

b) عين معادلة للمماس $(T_1)$ للمنحنى $\mathscr{C}_1$ في النقطة $I_1$

c) أنشئ المماس $(T_1)$ والمنحنى $\mathscr{C}_1$ .

<u>الجزء B</u> : دراسة بعض خواص الدالة $f_n$

1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f_n(x) = f_1(nx)$ ثم استنتج تغيرات الدالة $f_n$

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، النقطة $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى المنحنى $\mathscr{C}_n$ ؛

3) a) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غيرمعدوم المستقيم الذي معادلته y = 2 يقطع المنحنى $\mathscr{C}_n$ ؛ في نقطة واحدة يطلب تحديد فاصلتها . نرمز بـ $I_n$ إلى هذه النقطة

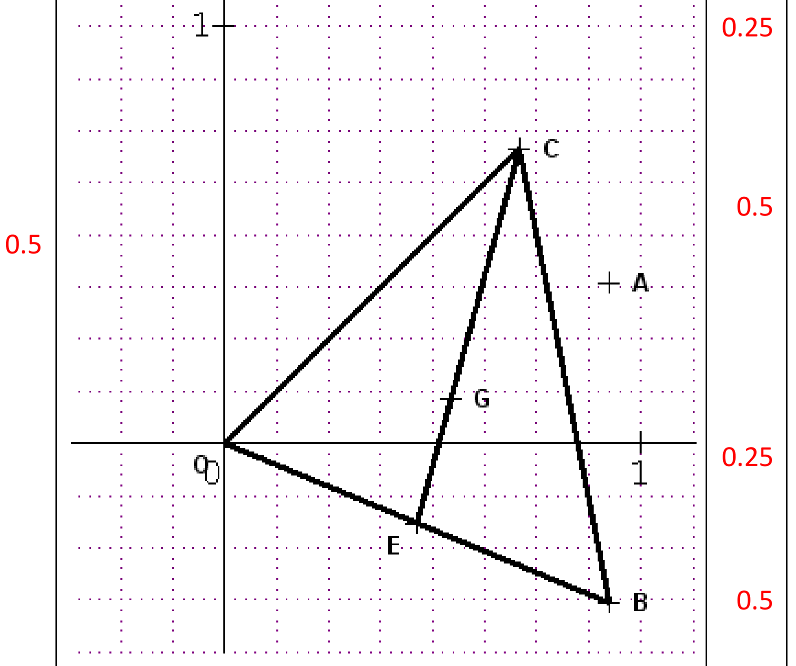
b) عين معادلة للمماس $(T_n)$ للمنحنى $\mathscr{C}_n$ عند النقطة $I_n$ . ثم أنشئ المماس $(T_2)$ و المنحنى $\mathscr{C}_2$

انتـــــهى مع تمنياتنا لكم بالتوفيق

السنة الدراسية :

تصحيح وسلم تنقيط اختبار الفصل الثالث

الموضوع الأول

| | | | |
|---|---|---|---|
| **التمرين الأول :** 4.5 | | | |
| 1) a) $\overrightarrow{AB}(-3;-4;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-5;2;-7)$ <br> $(-5)\times(-4)\neq 2\times(-3)$ | 0.5 | $z_A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ; <br> $z_B=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | 0.5 |
| b) <br> $\overrightarrow{AB}\times\vec{n}=1.(-3)+(-1).(-4)+(-1).1=0$ <br> و $\overrightarrow{AC}\times\vec{n}=0$ | 0.5 | 2) a) التحقق أن : $(z_A)^2=z_C$ | 0.5 |
| c) معادلة المستوي (ABC) : <br> $1(x-1)-1(y+2)-1(z-4)=0$ <br> أي : $x-y-z+1=0$ | 0.5 | b) الشكل الأسي لـ $z_C$ : $z_C=e^{i\frac{\pi}{4}}$ <br> $z_A=e^{\frac{1}{2}\left(i\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{8}}$ | 0.5 <br> 0.5 |
| 2) a) تمثيل وسيطي للمستقيم الذي يشمل O وعمودي على المستوي (ABC) : <br> $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\end{cases}\quad t\in IR$ | 0.5 | c) من المساواة : $e^{i\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ <br> نستنتج $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ | 0.5 |
| b) إحداثيات O' : <br> $t+t+t+1=0$ أي $t=-\frac{1}{3}$ <br> ومنه $O'\left(-\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ | 0.25 <br> 0.25 | 3) <br> a) لدينا $(z_A)^2=z_C$ ومنه $\frac{z_C}{z_A}=z_A$ <br> أي $\frac{z_C}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{8}}$ ومنه C صورة A بالدوران r | 0.5 |
| 3) a) $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$ تستلزم $\overrightarrow{BH}\times\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC}$ <br> ومنه $(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH})\times\overrightarrow{BC}=t(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC})$ <br> وبما أن $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC}=\lVert\overrightarrow{BC}\rVert^2$ و $\overrightarrow{OH}\times\overrightarrow{BC}=0$ <br> و $B\neq C$ فإن <br> $t=\frac{\overrightarrow{BO}\times\overrightarrow{BC}}{\lVert\overrightarrow{BC}\rVert^2}$ | 0.5 | b) <br>   | 0.5 |
| b) لدينا <br> $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ ، $\overrightarrow{BO}(2;6;-5)$ <br> و $\lVert\overrightarrow{BC}\rVert^2=4+36+64=104$ نستنتج أن : <br> $t=\frac{2.(-2)+6.6+(-5).(-8)}{104}=\frac{9}{13}$ | 0.25 <br> 0.5 | | |
| ومن العلاقة $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$ <br> نستنتج $H\left(\frac{-44}{13}\ ;\ \frac{-24}{13}\ ;\ \frac{-7}{13}\right)$ | 0.5 | 4) <br> a) E صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{1}{2}$ : <br> $\frac{z_E}{z_A}=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ تكافئ $z_E=\frac{1}{2}z_Ae^{-i\frac{\pi}{4}}$ | 0.5 |
| **التمرين الثاني :** 6.5 <br> 1) حل المعادلة : <br> $\Delta=2+\sqrt{2}-4=\sqrt{2}-2=i^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ | 0. 5 | تكافئ $z_E=\frac{1}{2}z_B$ | 0.5 |

(b

$z_G = \frac{z_O+z_B+z_C}{3} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{6}$ 0.5

(c $\frac{z_G-z_C}{z_E-z_C} = \frac{\frac{z_B+z_C}{3}-z_C}{\frac{1}{2}z_B-z_C} = \frac{\frac{1}{3}(z_B-2z_C)}{\frac{1}{2}(z_B-2z_C)} = \frac{2}{3}$ 0.5

تفسير هندسي : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$
النقط C ، E و G على استقامية . 0.5

## التمرين الثالث : 4.5

(a (1

b) التخمين : المتتالية متناقصة ومتقاربة من 1 0.5

2) a)البرهان بالتراجع :
من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \ge 1$
*التحقق من أجل n = 0 :صحيحة لأن :
$u_0 = 4$ و 4≥ 0
* مرحلة الانتقال من الرتبة n إلى الرتبة n+1 :
نفرض $u_n \ge 1$ ونبرهن أن $u_{n+1} \ge 1$ 0.5
$u_n \ge 1$ تكافئ $u_n + 1 \ge 2$
تكافئ $\frac{1}{u_n+1} \le \frac{1}{2}$
تكافئ $-\frac{4}{u_n+1} \ge \frac{-4}{2}$ 0.5
تكافئ $3 - \frac{4}{u_n+1} \ge 3 + \frac{-4}{2}$
تكافئ $u_{n+1} \ge 1$
نتيجة : مهما يكن العدد الطبيعي n : $u_n \ge 1$ 0.25

b) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1\,;+\infty[$
من أجل كل عدد من هذا المجال :
$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ نستنتج f متزايدة تماما 0.5

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \le u_n$
نبرهن بالتراجع :
* الخاصية صحيحة من أجل n = 0 0.25
* بما أن الدالة f متزايدة
إذا كان $u_{n+1} \le u_n$ فإن $f(u_{n+1}) \le f(u_n)$ 0.5
ومنه $u_{n+2} \le u_{n+1}$ .
نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \le u_n$ 0.25

c) مما سبق نستنتج أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي حسب النظرية متقاربة . 0.5

b) نهاية المتتالية $(u_n)$ هي العدد l حل المعادلة *f(x)=x*
*f(l)=l* تكافئ $l^2 - 2l + 1 = 0$ أي $l = 1$ . 0.5

## التمرين الرابع : 4.5

1) a) التحقق أن (10,15) حلا للمعادلة 0.25

b) مجموعة حلول المعادلة (E) : مجموعة الثنائيات (7k+10 , 11k + 15) حيث $k$ عدد صحيح . 0.75

c) عدد الثنائيات حلول المعادلة (E) التي تحقق الشرطين $0 \le x \le 50$ و $0 \le y \le 50$
نجد : $-\frac{10}{7} \le k \le \frac{40}{7}$ و $-\frac{15}{11} \le k \le \frac{35}{11}$ 0.5
عدد قيم $k$ : 5 قيم 0.25

(2
a) المعادلة (F) تكافئ $11x^2 = 7y^2 + 5$
ومنه : $11x^2 \equiv 7y^2[5]$
ومنه $x^2 \equiv 2y^2[5]$ 0.5

(b

| إذا كان $y$ يوافق | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| فإن $2\,y^2$ يوافق | 0 | 2 | 3 | 3 | 2 | [5] |

| إذا كان $x$ يوافق | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| فإن $x^2$ يوافق | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 | [5] |

0.5

(c
$x^2 \equiv 2y^2[5]$ تعني أن $x^2$ و $2y^2$ لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على 5 وبقراءة من الجدولين السابقين نستنتج أن $x$ و $y$ مضاعفان للعدد 5 . 0.5

3) إذا كان $x$ و $y$ مضاعفان للعدد 5 فإنه يوجد عددان صحيحان k و k' حيث : x = 5k و y = 5k'
تكون الثنائية (x ,y) حلا للمعادلة (F) إذا تحقق :
$11(5k)^2 - 7(5k')^2 = 5$ أي 0.5
$5(11k^2 - 7k'^2) = 1$ اي ان 1 مضاعف لـ 5 0.5
و هذا غير صحيح ومنه المعادلة (F) لاتقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

السنة الدراسية :

تصحيح وسلم تنقيط اختبار الفصل الثالث

الموضوع الثاني

**التمرين الأول :** 2.5 نقاط

الاقتراح الأول : خاطئ

لأن : لايوجد عدد t يحقق في آن واحد :

2t-1=-1 و -3t+2=-1 و t =1

0.25

الاقتراح الثاني : خاطئ

لأن إحداثيات A لاتحقق المعادلة 2x-3y + z = 0

0.25

الاقتراح الثالث : خاطئ

لأن $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}$ لا يعامد $\overrightarrow{u'}(3;1;3)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}'$ . فعلا

$$2.3+(-3).1+3.1\neq 0$$

0.25 0.25 0.25 0.25

الاقتراح الرابع : صحيح لأن

$\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}$ لا يوازي $\overrightarrow{u'}(3;1;3)$ شعاع توجيه $\mathscr{D}'$ فعلا :

$$2.1\neq(-3).3$$

و الجملة

$$\begin{cases}2t-1=3t'\\-3t+2=t'+2\\t=3t'-2\end{cases}$$ لاتقبل حلا

0.25 0.25

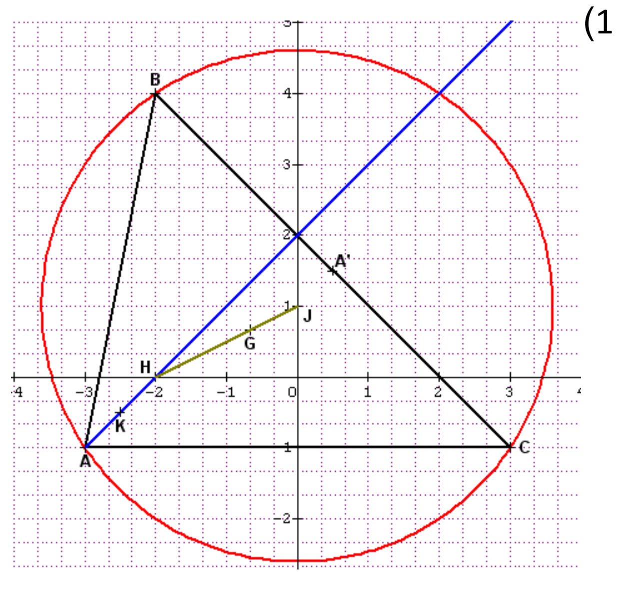
الاقتراح الخامس : صحيح لأن :

$$\frac{|2.(-1)-3(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

0.25 0.25

**التمرين الثاني :** 5

(1




0.5

2) $J$ مركز الدائرة $\mathscr{C}$ لأن :

$$AJ=|i-a|=|3+2i|=\sqrt{13}$$
$$BJ=|i-b|=|2-3i|=\sqrt{13}$$
$$CJ=|i-c|=|-3+2i|=\sqrt{13}$$

0.75

(3

$$\frac{b-c}{h-a}=\frac{-5+5i}{1+i}=\frac{5i(1+i)}{1+i}=5i$$

0.5

نستنتج أن :

$$(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{CB})=\arg(5i)=\frac{\pi}{2}$$

0.5

ومنه المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين

0.25

4) g لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC

$$g=\frac{a+b+c}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

0.5

5) النقط J ، H ، G على استقامية لأن :

$$\frac{i-h}{i-g}=\frac{2+i}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i}=3$$

0.5

اي $\overrightarrow{HJ}=3\overrightarrow{GJ}$

0.5

6) a) لاحقة K

$$z_K=\frac{a+h}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

0.5

b) الرباعي KHA'J متوازي أضلاع لأن :

0.5

$\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{A'J}$ أي $z_K-h+z_{A'}-i=0$

**التمرين الثالث:** 5.75

1) حساب $u_2$

0.25

$$u_2=u_1-\frac{1}{4}u_0=\frac{3}{4}$$

0.5

$u_2\times u_0\neq(u_1)^2$ و $u_2+u_0\neq 2u_1$

ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست لاحسابية ولا هندسية .

(2

a) $v_0=u_1-\frac{1}{2}u_0=1$

0.25

(b

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}$$
$$=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}$$

0.5

$$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$$

c) $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ — 0.25

d) عبارة $v_n$ بدلالة $n$ : — 0.5
$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3

a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$ — 0.25

b) $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$ — 0.25

c)

بما أن : $\frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$ — 0.5

نستنتج أن : $w_{n+1} = w_n + 2$

d) المتتالية $(w_n)$ حسابية أساسها 2 ومنه — 0.25
$$w_n = w_0 + 2n = 2n - 1$$

4) $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ تكافئ $u_n = w_n \times v_n$ — 0.5

ومنه
$$u_n = (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n-1}{2^n}$$

5) البرهان بالتراجع :

* التحقق من أجل $n = 0$ — 0.25

$S_0 = u_0 = -1$ و $2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = -1$

* نفرض : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

نبرهن أن $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$ أي — 0.5
$$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

لدينا : — 0.25
$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$$ — 0.75
$$S_{n+1} = 2 - \frac{2(2n+3) - 2n - 1}{2^{n+1}}$$
$$= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

نتيجة : مهما يكن العدد الطبيعي $n$ :
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

## التمرين الرابع 6.75

**الجزء $A$ :**

(1

$$f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x(1+7e^{-x})} = \frac{4}{1+7e^{-x}}$$ — 0.25

(2

a) $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{1+7e^{-x}} = 4$ — 0.5

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته y=4 مقارب للمنحنى $C_1$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+7} = 0$$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته y=0 مقارب للمنحنى $C_1$ بجوار $-\infty$ — 0.5

b) الدالة $f_1$ قابلة للاشتقاق على IR ومن أجل كل عدد x من IR :
$$f_1'(x) = \frac{-4(-7e^{-x})}{(1+7e^{-x})^2} = \frac{28e^{-x}}{(1+7e^{-x})^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f_1'(x) > 0$ — 0.5

نستنتج أن $C_1$ متزايدة تماما على IR .

c) لدينا $f_1(]-\infty;+\infty[) = ]0;4[$ — 0.25

نستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x :
$$0 < f_1(x) < 4$$ — 0.5

(3

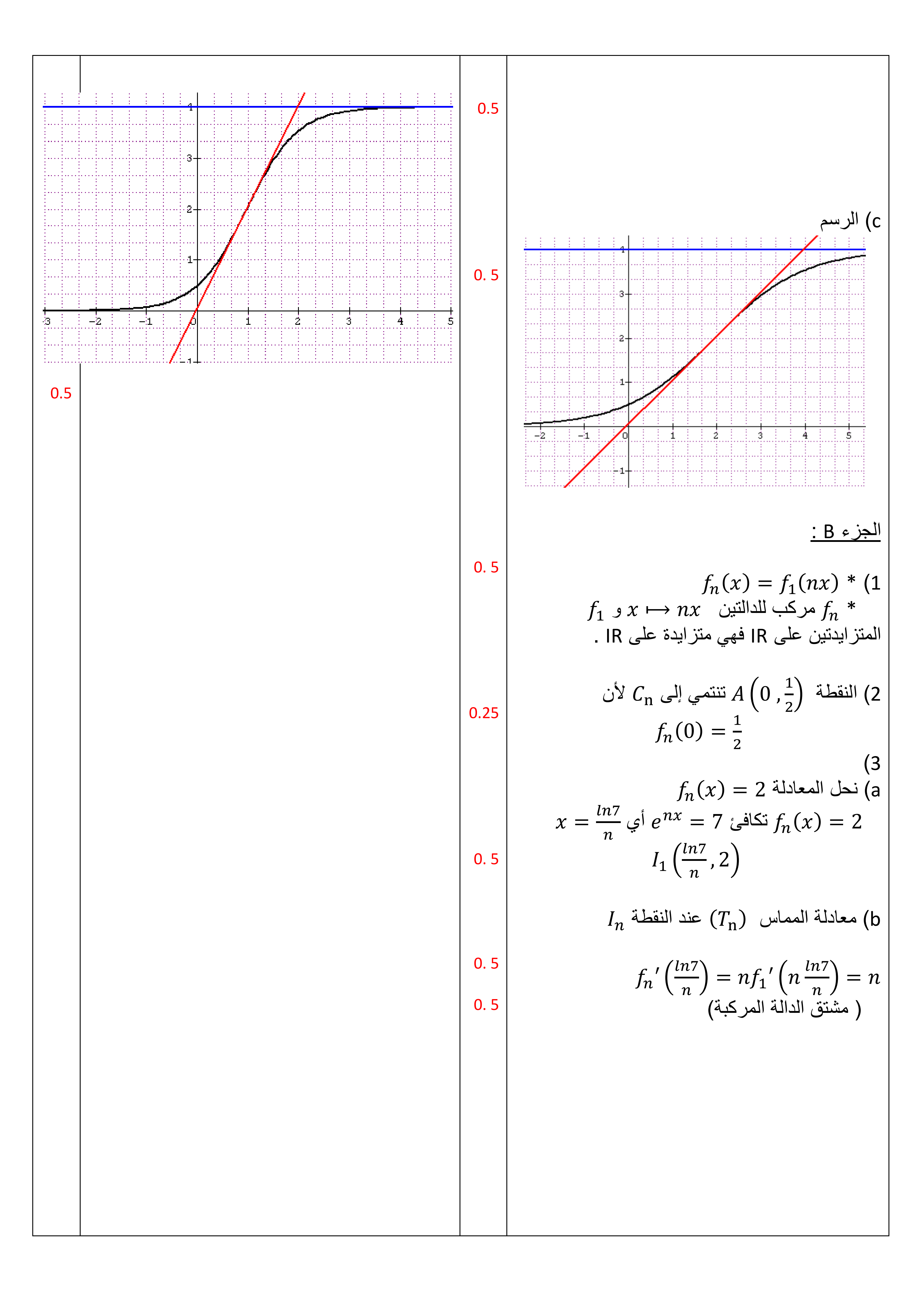
a) من أجل كل عدد حقيقي x ، 2ln7-x ينتمي إلى IR و

$$f_1(2ln7 - x) - 4 = \frac{4}{1+7e^{-(2ln7-x)}} - 4$$
$$= \frac{4}{1+\frac{1}{7}e^x} - 4 =$$
$$\frac{28}{7+e^x} - 4 = \frac{-4e^x}{e^x+7} = -f_1(x)$$ — 0.5

ومنه $f_1(2ln7 - x) + f_1(x) = 4$

نستنتج أن النقطة $I_1$ مركز تناظر للمنحنى $C_1$

b) معادلة المماس $(T_1)$ للمنحنى $C_1$ عند النقطة $I_1$ — 0.5



c) الرسم



0.5

0.5

**الجزء B :**

1) * $f_n(x) = f_1(nx)$

* $f_n$ مركب للدالتين $x \longmapsto nx$ و $f_1$ المتزايدتين على IR فهي متزايدة على IR .

0.5

2) النقطة $A\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى $C_n$ لأن $f_n(0) = \frac{1}{2}$

0.25

3)

a) نحل المعادلة $f_n(x) = 2$

$f_n(x) = 2$ تكافئ $e^{nx} = 7$ أي $x = \frac{ln7}{n}$

$I_1\left(\frac{ln7}{n},2\right)$

0.5

b) معادلة المماس $(T_n)$ عند النقطة $I_n$

$f_n{}'\left(\frac{ln7}{n}\right) = nf_1{}'\left(n\frac{ln7}{n}\right) = n$

( مشتق الدالة المركبة)

0.5

0.5



0.5

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الوادي | ثانويات: بوشوشة –عبد العزيز الشريف
امتحان البكالوريا التجريبي | هالي عبد الكريم- الاخوين كـيرد ولاية الوادي
الشعبة: **العلوم التجريبية** | دورة:مـــاي2010

---

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة:3ساعات ونصف

---

**على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**

**الموضوع الأول**

**التمرين الأول (4 نقط)**

$(u_n)$ متتالية عددية حيث : $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن اجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$

1)برهن بالتراجع ان: $1 \le u_n \le \frac{3}{2}$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

2)برهن ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ، استنتج أنها متقاربة

3) نضع $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

أ – اثبت ان المتتالية $(v_n)$ هندسية ، حدّد اساسها و حدّها الأول

ب- اكتب $v_n$ بدلالة $n$ ، واثبت ان $u_n = \frac{2 + 2^n}{1 + 2^n}$ واحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع $S_n = v_0 + v_1 + .... + v_n$ من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، احسب $S_n$ بدلالة $n$

**التمرين الثاني (4 نقط)**

نضع من اجل كل عدد مركب $z$: $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1) أ- احسب $P(-1)$

ب- عيّن العددين الحقيقيين $a$ ، $b$ بحيث : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ ثمّ حل المعادلة $P(z) = 0$.

2) في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومنجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

أ)أنشئ النقط $A, B, C, G$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A = -1$ ، $z_B = 2+i\sqrt{3}$, $z_C = 2-i\sqrt{3}$, $z_G = 3$

ب- احسب المسافات $AB$،$AC$،$CB$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$

جـ - عيّن عمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ واستنتج طبيعة المثلث $GAC$

3) لتكن $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث : $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG} = 12$ ......... (1)

---

أ- اثبت ان $G$ مرجح الجملة $\{(A;-1),(B,2),(C,2)\}$

ب- برهن ان العلاقة $(1)$ تكافئ العلاقة $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC}=4$ ، ثم اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة $(E)$

**التمرين الثالث (4 نقط)**

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر المستقيم $(d)$ المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x = 2-\frac{1}{2}t \\ y = 2 \\ z = 5-\frac{3}{2}t \end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$

نسمي $A$ النقطة التي إحداثياتها $(2;-1;1)$ ، $B$ النقطة التي إحداثياتها $(4;-2;2)$ و $C$ النقطة من $(d)$ ذات الفاصلة $1$

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل:

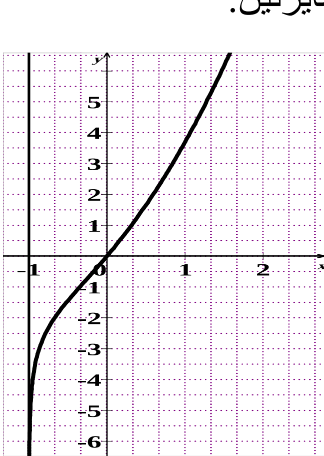
1) المستقيم $(d)$ يوازي المحور $(O;\vec{j})$.

2) المستوي $(P)$ الذي معادلته : $x+3z-5=0$ يمرّ بالنقطة $A$ وعمودي على $(d)$.

3) قيس الزاوية الهندسية $\widehat{BAC}$ هو $\frac{\pi}{3}rad$.

4) المستقيم $(d)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $C$ ونصف قطرها $10$ في نقطتين متمايزتين.

**التمرين الرابع (8 نقط)**




I- نعتبر الدالة العددية $g$ والمعرفة على $]-1.+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

$(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل

1) احسب نهايات $g$ عند حدود مجال تعريفها.

2) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات $g$ شكّل جدول تغيراتها. وحدد اشارتها

II- نعتبر الدالة العددية $f$ والمعرفة على $]-1.+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الأولى بيانيا.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1.+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

جـ) حدّد إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات $f$.

2-أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين أحدهما $\alpha$ من المجال $]-0,6;-0.5[$ والثاني $\beta$ من المجال $]1,3;1,4[$.

جـ) أنشئ المنحنى $(C_f)$

3-أ) احسب $A(\beta)$ مساحة الحيّز المستوي والمحدّد بـ $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين ذوي المعادلتين $x=\beta$ و $x=0$

ب) أثبت أن : $A(\beta)=\frac{(\beta^2-1)^2}{2}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $A(\beta)$.

## التمرين الأول (4 نقط)

**1)البرهان بالتراجع ان:** $1\le u_n \le \frac{3}{2}$ **من اجل كل** $n\in\mathbb{N}$

لدينا: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن اجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{2}{3-u_n}$

من أجل $n=0$ يكون لدينا $1\le u_0\le\frac{3}{2}$ محققة.

نفرض أن $1\le u_n\le \frac{3}{2}$ ونبرهن $1\le u_{n+1}\le\frac{3}{2}$

لدينا: $1\le u_n\le\frac{3}{2}$ تكافئ $-\frac{3}{2}\le -u_n\le -1$

تكافئ $\frac{3}{2}\le 3-u_n\le 2$ تكافئ $\frac{1}{2}\le\frac{1}{3-u_n}\le\frac{2}{3}$

تكافئ $1\le\frac{2}{3-u_n}\le\frac{4}{3}$ ومنه $1\le u_{n+1}\le\frac{3}{2}$

**2)البرهان ان المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.**

نبرهن أن $u_{n+1}-u_n \prec 0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3-u_n}-u_n=\frac{u_n^2-3u_n+2}{3-u_n}$$

المقام موجب تماما حسب الجواب السابق والبسط سالب تماماعلى المجال $]1;1,5]$ ومنه $u_{n+1}-u_n\prec 0$

**استنتاج ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة.**

$(u_n)$ متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ1

**3-أ)اثبات أن المتتالية $(v_n)$ هندسية وتحديد أساسها**

نبرهن أن $v_{n+1}=v_n.q$ ومن اجل كل $n\in\mathbb{N}$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-2}=\frac{u_n-1}{2u_n-4}=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

حدّها الأول هو $v_0=\frac{u_0-1}{u_0-2}=-1$

**ب)كتابة $v_n$ بدلالة n وإثبات أن** $u_n=\frac{2+2^n}{1+2^n}$ **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لدينا: $v_n=v_0.q^n$ ومنه $v_n=(-1).\left(\frac{1}{2}\right)^n=-2^{-n}$

لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n-2}$ ومنه $u_n=\frac{2v_n-1}{v_n-1}$

$$u_n=\frac{2v_n-1}{v_n-1}=\frac{-2(2)^{-n}-1}{-1(2^{-n})-1}=\frac{2+2^n}{1+2^n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2+2^n}{1+2^n}=1$ (يمكن وضع $x=2^n$)

**4) حساب المجموع $S_n$ بدلالة** $n$

لدينا: $S_n=v_0+v_1+....+v_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

ومنه: $S_n=-1\left(\frac{1-(2)^{-n-1}}{1-2^{-1}}\right)=2\left((2)^{-n-1}-1\right)$

## التمرين الثاني (4 نقط)

**1-أ) حساب** $P(-1)$

$$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$$

**ب) تعيين العددين الحقيقيين a وb.**

لدينا: $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$

بعد نشر وتبسيط العبارة السابقة نجد:

$P(z)=z^3+(a+1)z^2+(a+b)z+b .....(1)$

ولدينا $P(z)=z^3-3z^2+3z+7 ......(2)$

بالمطابقة بين العبارتين (1) و(2) نجد:

$a+1=-3$ و $b=7$ ومنه : $a=-4$

وعليه : $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$.

**حل المعادلة** $P(z)=0$.

$P(z)=0$ معناه $(z+1)(z^2-4z+7)=0$

معناه $(z+1)=0$ أو $(z^2-4z+7)=0$

$(z+1)=0$ معناه $z=-1$

حل المعادلة $(z^2-4z+7)=0$ بالمميز $\Delta$.

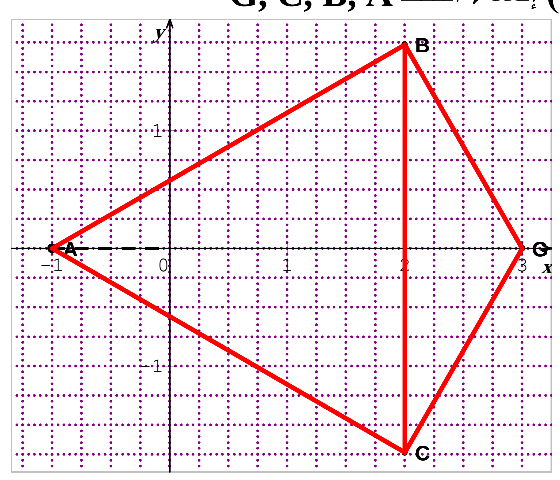
$$\Delta'=(-2)^2-7=-3=(i\sqrt{3})^2$$

ومنه حلي المعادلة هما: $z'=2-i\sqrt{3}$ و $z''=2+i\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة $P(z)=0$ هي :

$-1$ ، $2-i\sqrt{3}$ و $2+i\sqrt{3}$.

**2- أ) إنشاء النقط G, C, B, A**



**ب)حساب الأطوال AB ، AC ، CB**

$$AB=|z_A-z_B|=|-3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

$$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

$$CB=|z_B-z_C|=|2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

**استنتاج طبيعة المثلث ABC**

لدينا: $AB=AC=CB$ أي المثلث ABC متقايس الأضلاع

**جـ) تعيين عمدة للعدد المركب** $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

$$\arg\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}=\arg(z_A - z_C)-\arg(z_G - z_C)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

**استنتاج طبيعة المثلث GAC**

لدينا: $\arg\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث GAC قائم في C

**3-أ)اثبات ان G مرجح الجملة** $\{(A;-1),(B,2),(C,2)\}$

G مرجح الجملة معناه $-z_{\overrightarrow{GA}}+2z_{\overrightarrow{GB}}+2z_{\overrightarrow{GC}}=0$

$$-z_{\overrightarrow{GA}}+2z_{\overrightarrow{GB}}+2z_{\overrightarrow{GC}}=4-2+2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}=0$$

**ب)البرهان ان العلاقة (1) تكافئ** $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC}=4$

لدينا: $-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ ومنه:

$(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12$ تكافئ $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=4$

**كتابة معادلة ديكارتية للمجموعة (E)**

$\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-3\\y-0\end{pmatrix}.\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=4$ تكافئ $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=4$

تكافئ $x-3+\sqrt{3}y-4=0$ تكافئ $x+\sqrt{3}y-7=0$

**التمرين الثالث(4نقط)**

1) خاطئ

$\overrightarrow{u_d}\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (d)

لايوازي $\vec{j}(0;1;0)$ شعاع توجيه $(O;\vec{j})$.

2)صحيح لأن: $\overrightarrow{u_d}\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right)$ شعاع توجيه للمستقيم (d)

يوازي $\overrightarrow{n_p}(1;0;3)$ الشعاع الناظم للمستوي (P) و $A\in(P)$

3 خاطئ لأن: $A(2;-1;1)$ و $B(4;-2;2)$

C نقطة من المستقيم (d) ذات الفاصلة 1

أي: $1=2-\frac{1}{2}t$ نستنتج $t=2$ إحداثيات C هي $(1;2;2)$

لدينا: $\cos(\widehat{BAC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{-4}{\sqrt{66}}\neq\frac{1}{2}$

نستنتج ان قيس الزاوية $\widehat{BAC}$ ليس $\frac{\pi}{3}$rad

4) صحيح لأن

النقطة C مركز سطح الكرة (S) تنتمي للمستقيم (d)

وبالتالي فإن المستقيم (d) يقطع حتما سطح الكرة (S)

في نقطتين متمايزتين

**التمرين الرابع (8 نقط)**

**I-1)حساب** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$ معرفة على $]-1،+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+\ln(x+1))=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(1-2+\ln(x+1))=-\infty$$

**2)دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها.**

من البيان الدالة g متزايدة تماما وجدول تغيراتها هو

| x | -1 | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g'(x) | | + | |
| g(x) | $-\infty$ | 0 ↗ | $+\infty$ |

**تحديد إشارة g(x)**

$g(0)=0$ وإشارة g(x) هي حسب الجدول التالي:

| x | -1 | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g(x) | - | 0 | + |

**II-1- أ) حساب** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ **وتفسير النتيجة بيانيا**

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(-2-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{-1}{x+1}=-\infty$

نستنتج وجود مستقيم مقارب عمودي معادلته: $x=-1$

**حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty-0=+\infty$$

**ب) البرهان انه من أجل كل** $x\in D_f$ $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

لدينا: f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ حيث:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-1\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

ومنه: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

**جـ)تحديد اشارة $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات $f$.**

شارة $f'(x)$ هي حسب اشارة $g(x)$

| x | -1 | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | 0 | + |
| f(x) | +∞ ↘ | -1 | ↗ +∞ |

**2-أ)تبيين أن المستقيم $(\Delta): y=x-1$ مقارب مائل لـ$(C_f)$**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

**ب) التحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين .**

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد $\alpha$ في المجال $]-0,6;-0.5[$

لأن الدالة $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على هذا المجال

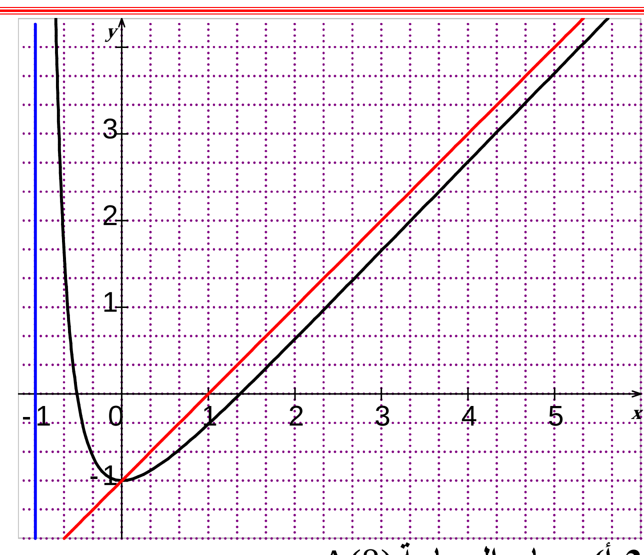
وذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(-0,6)\times f(-0.5)\prec 0$

لمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد $\beta$ في المجال $]1,3;1;4[$

لأن الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على هذا المجال

وذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(1,3)\times f(1,4)\prec 0$

**جـ)انشاء المنحنى $(C_f)$.**




**3-أ) حساب المساحة $A(\beta)$ .**

$A(\beta)$ مساحة الحيز المستوي والمحدد

بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=\beta$ ، $x=0$ ، $y=x-1$

ومنه: $A(\beta)=\int_0^\beta((x-1)-f(x))dx=\int_0^\beta\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$

بوضع: $u=\ln(x+1)$ فإن $u'=\frac{1}{x+1}$

الدالة: $x\to\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ من الشكل: $x\to u(x).u'(x)$

ومنه الدالة الأصلية لها هي من الشكل: $x\to\frac{1}{2}[u(x)]^2+c$

ومنه: $A(\beta)=\frac{1}{2}[(\ln(x+1))^2]_0^\beta=\frac{1}{2}[(\ln(\beta+1))^2-(\ln 1)^2]$

أي: $A(\beta)=\frac{1}{2}(\ln(\beta+1))^2$

**ب)أثبات أن: $A(\beta)=\frac{(\beta^2-1)^2}{2}$ واستنتاج حصرالـ$A(\beta)$**

لدينا: $\beta$ حلا للمعادلة $f(x)=0$ معناه $f(\beta)=0$

$f(\beta)=0$ معناه $\frac{\ln(\beta+1)}{\beta+1}=\beta-1$

معناه $\ln(\beta+1)=\beta^2-1$

ولدينا من جهة أخرى $A(\beta)=\frac{1}{2}(\ln(\beta+1))^2$

ومنه : $A(\beta)=\frac{1}{2}(\beta^2-1)^2$ .

**استنتاج حصرالـ$A(\beta)$**

لدينا: $1,3\prec\beta\prec 1,4$ ومنه $1,69\prec\beta^2\prec 1,96$

ومنه $0,69\prec\beta^2-1\prec 0,96$

ومنه $0,4761\prec(\beta^2-1)^2\prec 0,9216$

ومنه: $0,23805\prec\frac{1}{2}(\beta^2-1)^2\prec 0,4608$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

إمتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي




مديرية التربية لولاية البليدة

ثانوية المصالحة الوطنية- بني تامو-

الشعبة: علوم تجريبية

دورة : ماي 2018

إختبار في مادة: الرياضيات

المدة:03 ساعات و نصف

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول:(04 نقاط)

1) عيّن العددين المركبين $a$ و $b$ علما أنّ : $\begin{cases} \bar{a}-\bar{b}=1+3i \\ a+ib=-1+3i \end{cases}$ .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ . نعتبر النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب : $a=3+i$ و $b=2+4i$ ، و نفرض الإنسحاب $T$ الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ .

أ) عيّن لاحقة النقطة $C$ صورة $O$ بالإنسحاب $T$ .

ب) أحسب العدد $\frac{z_c-z_A}{z_B}$ ، ثمّ أكتبه على الشكل الأسي .

- ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ و $[OB]$ ؟ .

ج) إستنتج ممّا سبق طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثمّ عيّن لاحقة $E$ مركز تناظر الرباعي $OABC$ .

3) نعتبر التشابه المباشر $S$ الذي مركزه $O$ و يحولّ $B$ إلى $C$ :

أ) أعط الكتابة المركّبة للتشابه المباشر $S$ .

ب) ماهي صورة النقطة $A$ بالتشابه $S$ ؟ .

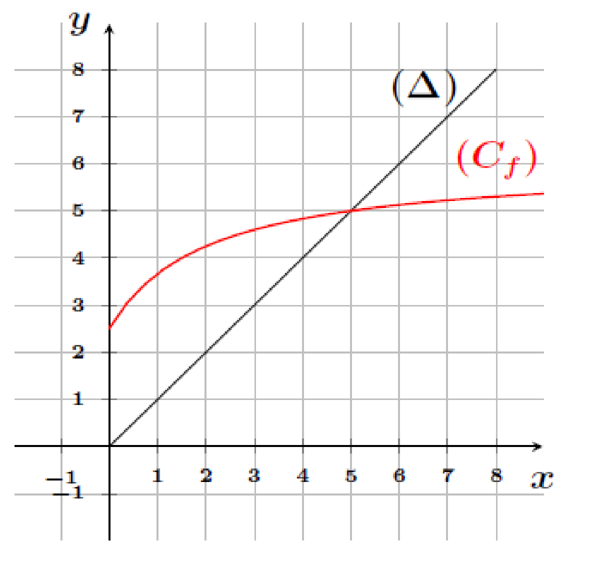
ج) نضع : $S^4=S\circ S\circ S\circ S$

- أعط الكتابة المركّبة للتحويل $S^4$ ، و ماطبيعة هذا التحويل ؟ .

### التمرين الثاني:(04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

$f$ الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\frac{6x+5}{x+2}$ ، و ليكن $(C_f)$ المنحني الممثل لها، $(\Delta)$ هوالمستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل)




I) تحقّق أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ .

II) $(u_n)$ متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1}=f(u_n)$ .

1) أ) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ و تقاربها .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 \le u_n \le 5$ .

3) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ، هل هي متقاربة ؟ .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = \dfrac{u_n - 5}{u_n + 1}$ .

أ) بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) عبّر عن $v_n$ ثمّ عن $u_n$ بدلالة $n$ .

ج) ما هي نهاية المتتالية $(u_n)$ ؟ .

5) أحسب المجموع $S_n$ حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0+1} + \dfrac{1}{u_1+1} + .... + \dfrac{1}{u_n+1}$ .

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

I) يحتوي و عاء على $n$ كرة بيضاء ، حيث : $(n \ge 2)$ وَ $5$ كرات حمراء وَ $3$ كرات خضراء ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الوعاء :

1) ما إحتمال سحب كرتين بيضاوين ؟ .

2) نسمي $p(n)$ إحتمال سحب كرتين من نفس اللّون .

أ) بيّن أنّ : $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$ .

ب) أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$ ، ثمّ فسّر النتيجة المحصّل عليها .

II) فيما يلي نعتبر $n = 4$ ، يأتي لاعب و يقوم بنفس التجربة الأولى : في البداية يدفع $30DA$ إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب $40DA$ ، و إذا وجدهما من لونين مختلفين يكسب $5DA$ .

نسمي الربح الجبري للاعب الفرق بين المبلغ المدفوع أوّلا و المبلغ الذي يكسبه ، و ليكن المتغيّر العشوائي $X$ هو الربح الجبري للاعب :

1) ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي $X$ ؟ .

2) أكتب قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ ، ثمّ أحسب أمله الرياضي .

III) فيما يلي نعتبر $n = 2$ ، نسحب من الوعاء عشوائيا كرتين على التوالي و بدون إرجاع :

1) شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج التجربة .

2) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

$A$ : " سحب كرتين من نفس اللون " ، $B$ : " سحب كرة خضراء واحدة على الأقل " .

3) نفرض أنّ الكرية في السحبة الأولى كانت خضراء ، ما إحتمال أن تكون حمراء في السحبة الثانية ؟ .

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـــــ : $g(x) = x + 2 - e^x$ .

1) أدرس تغيّرات الدالة $g$ على $\left[0;+\infty\right[$ ، وَ عيّن نهاية $g$ عند $+\infty$ .

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا $\alpha$ على $\left]0;+\infty\right[$ .

ب) تحقّق أنّ : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$ .

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ من المجال $\left[0;+\infty\right[$ .

II) نعرّف على المجال $\left[0;+\infty\right[$ الدالة $f$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$ ، و ليكن $(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\left[0;+\infty\right[$ : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ .

ب) إستنتج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ ، من $\left[0;+\infty\right[$ : $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times g(x)}{(xe^{x}+1)^{2}}$ .

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة $f$ على $\left[0;+\infty\right[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

3) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$ .

4) أ) تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $\left[0;+\infty\right[$ : $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$ ، حيث : $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$ .

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $u$ على $\left[0;+\infty\right[$ ، ثمّ إستنتج إشارة $u(x)$ .

ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ .

د) أرسم كلا من $(T)$ و المنحني $(C_f)$ ، الوحدة : $4cm$ .

III) 1) عيّن دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على المجال $\left[0;+\infty\right[$ .

2) أحسب بـــ $cm^{2}$ مساحة الحيّز المحدّد بالمنحني $(C_f)$ وَ المماس $(T)$ وَ محور التراتيب وَ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ .

**إنتهى الموضوع الأول**

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول:(04 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-i)(z^2+2z+2)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ . النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ لواحقها :

$z_A=i$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1-i$ ، $z_D=1-2i$ على الترتيب .

أ) تحقق أن النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$ .

ب) أكتب العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) أكتب العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي ، ثم أحسب $(-4+4i)^{2018}$ .

3) من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن $B$ ، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=\dfrac{iz-4+2i}{z-2}$ .

أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$ .

ب) بين أن : $AM'\times BM=4\sqrt{2}$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

4) $(\Gamma)$ هي مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\arg(z'-i)=\dfrac{\pi}{4}$ .

– تحقق أن النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E=2+i$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم عين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ .

## التمرين الثاني: (04 نقاط)

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـــ : $u_0=1$ وَ من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$ .

1) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<2$ .

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)$ .

3) إستنتج أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة . ما هي نهايتها ؟ .

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $2-u_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(2-u_n)$ .

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\leq 2-u_n\leq(\dfrac{4}{5})^n$ ، ثمّ عيّن نهاية المتتالية $(u_n)$ من جديد

## التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر المستوي $(P)$ معادلته : $2x+y-2z+4=0$

وَ النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$ .

1) أ) بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ وَ $C$ تعيّن مستويا .

ب) تحقّق أنّ $(P)$ هو المستوي $(ABC)$ .

2) أ) بيّن أنّ المثلث $ABC$ قائم .

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار بالنقطة $O$ وَ العمودي على $(P)$ .

ج) النقطة $K$ هي المسقط العمودي للنقطة $O$ على $(P)$ ، أحسب الطول $OK$ .

3) النقطة $G$ هي مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$

أ) أحسب إحداثيات النقطة $G$ .

ب) أحسب المسافة بين النقطة $G$ وَ المستوي $(P)$ .

4) $(\Gamma)$ هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

أ) عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ وَ عناصرها المميزة .

ب) ما طبيعة $(\Gamma)\cap(P)$ ؟ .

ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $GABC$ .

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$ .

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$ .

ب) عيّن نهايات الدالة $g$ عند $0$ وَ عند $+\infty$ .

2) أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $g$ وَ شكل جدول تغيّراتها .

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ .

II) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$ .

$(C)$ هو المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) أحسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

3) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل لــ$(C)$ بجوار $+\infty$ ، ثمّ حدد وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

4) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

5) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C)$ عند النقطة $A(1;0)$ .

6) أرسم كلا من $(\Delta)$ ، $(T)$ وَ المنحني $(C)$ .

7) لتكن $(d_m)$عائلات المستقيمات المعرفة بـــ : $y=mx-m$ ، حيث $m$ وسيط حقيقي

أ) تحقّق أنّ جميع المستقيمات $(d_m)$ تمر بالنقطة $A$ .

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتى يكون للمعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان .

III) 1) باستعمال التكامل بالتجزئة ، بيّن أنّ : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx=1-\frac{2}{e}$ .

2) أحسب بـــ$u.a$ مساحة الحيّز للمستوي المحدد بالمنحني $(C)$ وَ $(\Delta)$ وَ المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=1$ وَ $x=e$ ( يجب تقديم القيمة المضبوطة لمساحة الحيز) .

**إنتهى الموضوع الثاني**

# التصحيح المفصّل للبكالوريا التجريبي دورة ماي 2018 — الموضوع 01

## تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

**1) تعيين العددين المركبين $a$ و $b$ :** ----------

لدينا الجملة : $\begin{cases}\overline{a}-\overline{b}=1+3i\\ a+ib=-1+3i\end{cases}$ ، أي : $\begin{cases}a-b=1-3i\ ........(1)\\ a+ib=-1+3i\ .....(2)\end{cases}$ بالطرح نجد : $-b-ib=2-6i$ ، أي :

$b(-1-i)=2-6i$ ، أي : $b=\dfrac{2-6i}{-1-i}$ ، ومنه : $\boxed{b=2+4i}$ . و بالتعويض نجد : $\boxed{a=3+i}$ .

**2) أ) تعيين لاحقة $C$ صورة $O$ بالإنسحاب $T$ :** ----------

بما أنّ $C$ صورة $O$ بالإنسحاب $T$ فإن : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ ، و منه : $z_C=z_B-z_A$ ، أي : $\boxed{z_C=-1+3i}$ .

**ب) حساب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}$ ، ثم كتابته على الشكل الأسي :** ----------

لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}=\dfrac{-1+3i-3-i}{2+4i}=\dfrac{-4+2i}{2+4i}=i$ ، أي : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

إذن : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، ومنه : $AC=OB$ و $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ .

إذن القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقايستان و متعامدتان .

**ج) إستنتاج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ و تعيين لاحقة النقطة $E$ :** ----------

بما أنّ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ فإنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ، و بما أنّ $[AC]$ ، $[OB]$ متقايستان و متعامدتان فسيكون الرباعي $OABC$ مربّع .

$E$ هي مركز تناظر الرباعي $OABC$ ، أي : هي منتصف القطرين ، و منه : $z_E=\dfrac{z_O+z_B}{2}=1+2i$ .

**3) أ) الكتابة المركبة للتشابه $S$:** ----------

لدينا : $S$ مركزه $O$ و يحوّل $B$ إلى $C$ أي : $z'-z_O=ke^{i\theta}(z-z_O)$ ، أي : $z'=ke^{i\theta}z$ ، و منه :

$z_C=ke^{i\theta}z_B$ ، أي : $\dfrac{z_C}{z_B}=ke^{i\theta}$ .

نحسب $\dfrac{z_C}{z_B}$ : $\dfrac{z_C}{z_B}=\dfrac{-1+3i}{2+4i}=\left(\dfrac{-1+3i}{2+4i}\right)\left(\dfrac{2-4i}{2-4i}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ .

لدينا: $\begin{cases}\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ ، إذن عبارة التشابة $S$ هي : $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ أو $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$ .

**ب)صورة $A$ بالتشابه $S$ :** ----------

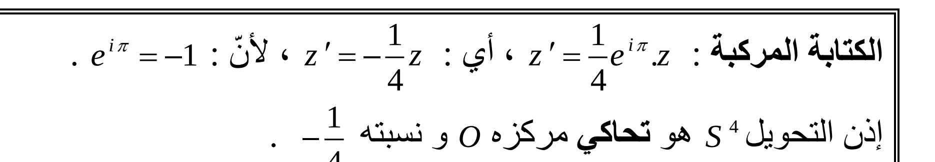
لدينا : $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$ ، أي : $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z_A$ ، أي: $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(3+i)$ ، و منه: $z'=1+2i$ .

إذن : $E$ هي صورة $A$ بالتشابه $S$ .

**ج) العبارة المركبة للتحول $S^4$ ، و طبيعته :** ----------

لدينا : $S^4=S\circ S\circ S\circ S$ ، أي أنّ $S^4$ هو تشابه مباشر نسبته : $k=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$ ، وزاويته : $\theta=4\times\dfrac{\pi}{4}=\pi$ .

و مركزه : $O$ .



**الكتابة المركبة** : $z'=\frac{1}{4}e^{i\pi}.z$ ، أي : $z'=-\frac{1}{4}z$ ، لأنّ : $e^{i\pi}=-1$ .

إذن التحويل $S^4$ هو **تحاكي** مركزه $O$ و نسبته $-\frac{1}{4}$ .

| **تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)** **(المتتاليات العددية)** | التنقيط |
|---|---|

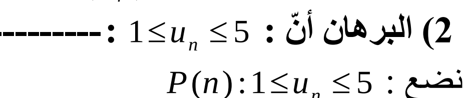
I) **التحقق أنّ $f$ متزايدة على** $[0;+\infty[$ : ------------------------------------------------------------

لدينا : $f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}>0$ ، و منه الدالة $f$ متزايدة على $[0;+\infty[$ .

II(1) **أ) تمثيل الحدود** $u_0$ ،$u_1$ ،$u_2$ ،$u_3$:(أنظر الشكل المقابل)

**ب) التخمين** : ----------------------------------------

نلاحظ أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة ، و تتقارب حدودها نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$.



**2) البرهان أنّ : $1\le u_n\le 5$** : --------------------------

نضع : $P(n):1\le u_n\le 5$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي : $1\le u_0\le 5$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ . أي نفرض أن $1\le u_n\le 5$ صحيحة و نبين أن $1\le u_{n+1}\le 5$ .

- لدينا فرضا أنّ: $1\le u_n\le 5$ ، و بما أنّ $f$ متزايدة على $[1;5]$ ، فإنّ : $f(1)\le f(u_n)\le f(5)$ ، أي : $\frac{11}{3}\le u_{n+1}\le 5$ ، ومنه : $1\le u_{n+1}\le 5$ . و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

**3) دراسة إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها:** ---------------------------------------------

من أجل كل عدد طبيعي $n$ ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ :

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{6u_n+5}{u_n+2}-u_n=\frac{-u_n^2+4u_n+5}{u_n+2}$ . الآن ندرس إشارة $-u_n^2+4u_n+5$ على المجال $[1;5]$:

بعد الدراسة نلاحظ أنّه على المجال $[1;5]$: $-u_n^2+4u_n+5\ge 0$ ، و منه المتتالية $(u_n)$ متزايدة .

- بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة و محدودة من الاعلى ، فهي **متقاربة** .

**3)أ) بيان أن $(v_n)$ متتالية هندسية** : ------------------------------------------------------------

لدينا: $v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$ ،أي: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{6u_n+5}{u_n+2}-5}{\frac{6u_n+5}{u_n+2}+1}=\frac{\frac{6u_n+5-5u_n-10}{u_n+2}}{\frac{6u_n+5+u_n+2}{u_n+2}}=\frac{u_n-5}{7u_n+7}=\frac{1}{7}\times\frac{u_n-5}{u_n+1}$ ،

و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{7}v_n$ ، إذن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{7}$ ، و حدها الأول : $v_0=-2$ .

**ب) التعبير عن $v_n$ بدلالة $n$ و $u_n$ بدلالة $n$** :----------- ------------------------------------------------

- عبارة $v_n$ : $v_n=v_0\times q^n$ ، أي : $v_n=-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$ .

- عبارة $u_n$ : لدينا $v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$ أي: $v_n(u_n+1)=u_n-5$ ، أي: $v_nu_n+v_n=u_n-5$ ، أي :

$v_n u_n - u_n = -v_n - 5$ ، أي : $u_n(v_n - 1) = -v_n - 5$ ، و منه : $u_n = \frac{-v_n - 5}{v_n - 1}$ ، أي: $u_n = \frac{-2\left(\frac{1}{7}\right)^n - 5}{-2\left(\frac{1}{7}\right)^n - 1}$ .

**ج) حساب نهاية المتتالية** $(u_n)$: ----------------------------------------

نعلم أنّ : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ ، لأنّ : $-1 < \frac{1}{7} < 1$ ، و منه : $\lim_{n\to\infty} u_n = 5$ .

**5) حساب المجموع** $S_n$ : ----------------------------------------

لدينا : $S_n = \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + .... + \frac{1}{u_n+1}$ . **نعلم أنّ :** $v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$ ،أي: $v_n = \frac{u_n + 1 - 6}{u_n + 1}$ أي: $v_n = 1 - \frac{6}{u_n + 1}$

ومنه: $\frac{6}{u_n+1} = 1 - v_n$ ، أي: $\frac{1}{u_n+1} = \frac{1-v_n}{6}$ ( بعد القسمة على 6 ) .

إذن: $S_n = \frac{1-v_0}{6} + \frac{1-v_2}{6} + .... + \frac{1-v_n}{6}$ ،أي: $S_n = \frac{1}{6}\left[\underbrace{(1+1+....1)}_{n \text{ مرة}} - (v_0 + v_2 + .... + v_n)\right]$ ، أي :

$S_n = \frac{1}{6}\left[(n+1) - v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ ، أي : $S_n = \frac{1}{6}\left[(n+1) - 2\times\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{7}}\right]$ ، أي :

$S_n = \frac{1}{6}\left[n+1+2\times\frac{7}{6}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)\right]$ ، و منه : $S_n = \frac{1}{6}\left[n+1+\frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)\right]$ .

| تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) (الإحتمالات) | التنقيط |
|---|---|

I) أوّلا نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب :

$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{2(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$ .

**1) إحتمال سحب كرتين بيضاوين :** ----------------------------------------

أولا نحسب عدد الحالات الملائمة للسحب : $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ .

إذن إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو: $\frac{n^2-n}{(n+8)(n+7)} = \frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$ .

**2) أ) بيان أنّ :** $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$ : ----------------------------------------

$P(n)$ هي إحتمال سحب كرتين من نفس اللون ، إذن : $P(n) = \frac{C_n^2 + C_5^2 + C_3^2}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 10 + 3}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$ ،

أي: $P(n) = \frac{\frac{n^2-n+20+6}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$ ، و منه : $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$ ، **و هو المطلوب .**

**ب) حساب** $\lim_{n\to\infty} P(n)$ ، **ثم نفسر النتيجة :** ------------------------------------------------------------

$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$ .

**التفسير :** الحادثة " **سحب كرتين من نفس اللون** " تكون <u>حادثة أكيدة</u> لما $n$ يكون كبيرا بالقدر الكافي .

II) **1) قيم المتغير العشوائي** $X$ **:** ------------------------------------------------------------------

المتغير العشوائي يعبّر عن الربح الجبري للاعب (الفرق بين المبلغ المدفوع أولا و المبلغ الذي يكسبه) ،

و منه قيم المتغير العشوائي $X$ هي : $(X=10): X=40-30=10$ ، $(X=-25): X=5-30=-25$ .

**2) تعيين قانون الإحتمال، و حساب أمله الرياضي :** -----------------------------------------------------

- حالة $(X=10)$ أي الكرتان المسحوبتان من نفس اللون ، إذن : $P(X=10)=P(n)......(n=4)$ ، أي :

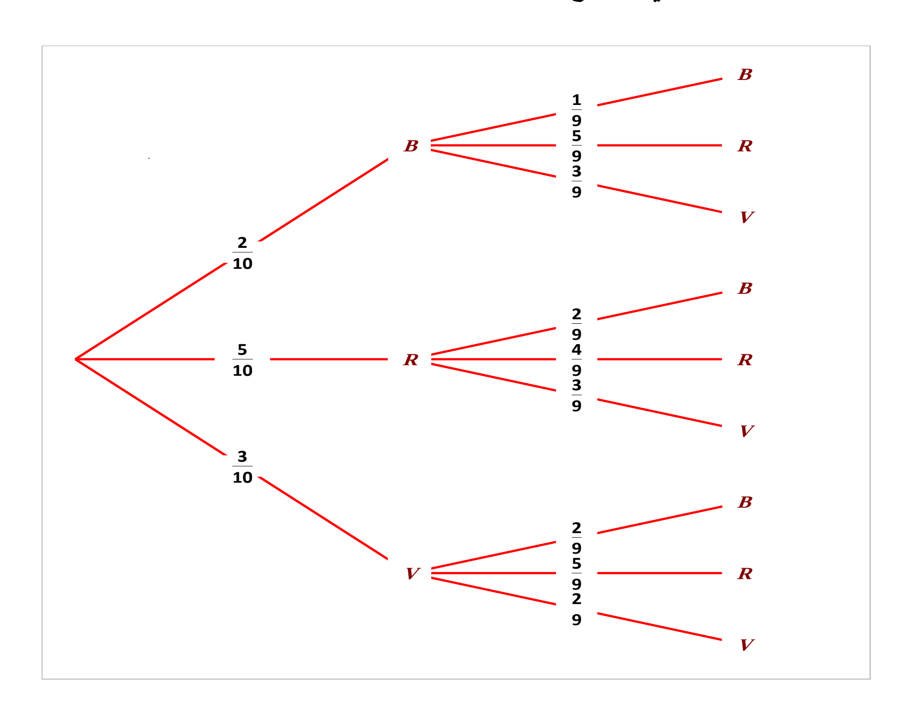
$P(X=10)=\frac{38}{132}=\frac{19}{66}$ .

- حالة $P(X=-25)$ أي الكرتان المسحوبتان مختلفتان في اللون (الحادثة العكسية لـ $P(n)$) ، إذن :

$P(X=-25)=1-\frac{19}{66}=\frac{47}{66}$ .

**حساب الأمل الرياضي :** $E(X)=\sum_{i=1}^{2} X_i . P_i$ ، أي : $E(X)=\frac{(10\times19)+(-25\times47)}{66}=\frac{-985}{66}$ .

III) **1) تشكيل شجرة الإحتمالات التي تنمذج الوضعية :** -----------------------------------------------




**2) حساب إحتمال الحوادث التالية :** ----------------------------------------------------------------

- سحب كرتين من نفس اللون : $P(A)=\left(\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)$ ، أي: $P(A)=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$ .

- سحب كرة خضراء واحدة على الأقل : $P(B)=\left(\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)$ ، $P(B)=\frac{27}{90}=\frac{3}{10}$ .

**3) حساب الإحتمال الشرطي :** -------------------------------------------------------------------

علما أنّ الكرة المسحوبة أولا خضراء فإحتمال أن سحب كرة حمراء ثانيا هو : $\frac{5}{9}$ (أنظر شجرة الإحتمالات)

| التنقيط | (الدالة الأسية) | تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) |
|---|---|---|

**الجزء الأول:**

**1) دراسة إتجاه تغير الدالة $g$ :** ------------------------------------------

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x)=1-e^x$ .

نلاحظ أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ : $g'(x)\le 0$ .

**الخلاصة:** الدالة $g$ متناقصة على $[0;+\infty[$ .

**- حساب** $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-e^x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$

**جدول التغيرات الدالة $g$ :**

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $1$ ↘ $-\infty$ |

**3) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $[0;+\infty[$ :** ------------------------

الدالة $g$ مستمرة و رتيبة تماما على $]0;+\infty[$ و لدينا، $\lim_{x\to+\infty} g(x)\times\lim_{x\to 0} g(x)<0$ و بتالي حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي $\alpha$ من $]0;+\infty[$ حيث $g(\alpha)=0$ .

**ب) التحقّق أنّ : $1{,}14<\alpha<1{,}15$** : بما أنّ : $\begin{cases} g(1{,}14)=0{,}01 \\ g(1{,}15)=-0{,}008\end{cases}$ أي $g(1{,}14)\times g(1{,}15)<0$ ، فإن :

$g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ على $]1{,}14;1{,}15[$ ، إذن : $1{,}14<\alpha<1{,}15$ .

**4) إشـــارة $g(x)$ :** ------------------------------------------------------------------

| $x$ | $0$ $\qquad$ $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $-$ |

**الجزء الثاني:** لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

**1) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$** ------------------------------------

لدينا: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}=\dfrac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{xe^x+1}{e^x}}=\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{x+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، إذن : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، **و هو المطلوب** .

**ب) إستنتاج نـهاية $f$ عند $+\infty$ :** ----------------------------------------------------

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\right)$ ، نضع $\begin{cases}-x=t\\ x\to+\infty\\ t\to-\infty\end{cases}$ ، أي : $\lim_{t\to-\infty}\left(\dfrac{1-e^t}{-t+e^t}\right)=0$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim_{t\to-\infty} e^t=0\\ \lim_{t\to-\infty}\dfrac{1}{-t}=0\end{cases}$ .

**2) أ) بيان أنّه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$ :** ---------------------------

الدالة $f$ قابلة للإستقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{e^x(xe^x+1)-(e^x+xe^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}=\frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{(xe^x+1)^2}=\frac{xe^x+2e^x-e^{2x}}{(xe^x+1)^2}$$

أي : $f'(x)=\dfrac{e^x\times(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}$ ، و منه : $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$ ، **و هو المطلوب** .

**ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، و تشكيل جدول تغيّراتها :** ----------------------------------------

نلاحظ أنّ إشـــــارة $f'(x)$ من إشـــارة $g(x)$ .

- الدالة $f$ متزايدة تماما على $]0;\alpha[$

- الدالة $f$ متناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$

| $x$ | $0$ $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ |

**- جدول التغيرات**

| $x$ | $0$ $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0 \nearrow f(\alpha)$ | $\searrow 0$ |

**ج) بيان أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$ :** -------------

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$ ، و لدينا أيضا : $g(\alpha)=0$ ، أي :

$\alpha+2-e^{\alpha}=0$ ، أي : $e^{\alpha}=\alpha+2$ ، الآن نعوض قيمة $e^{\alpha}$ في $f(\alpha)$ :

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، و منه : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ **وهو المطلوب .**

**- إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$ :** لدينا $1{,}14<\alpha<1{,}15$ ،أي : $2{,}14<\alpha+1<2{,}15$ ،أي : $\dfrac{1}{2{,}15}<\dfrac{1}{\alpha+1}<\dfrac{1}{2{,}14}$

و منه : $0{,}465<f(\alpha)<0{,}467$ .

**3) كتابة معادلة المماس $(T)$ لـ $(C_f)$** عند النقطة ذات الفاصلة $0$ : ------------------------------------

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، أي : $\boxed{(T): y=x}$ ، لأنّ : $\begin{cases} f'(0)=1 \\ f(0)=0 \end{cases}$ .

**4) أ) التحقق أنّه من أجل كل** $x\in[0;+\infty[$ : $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$ ------------------------------

لدينا : $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$ . $f(x)-x=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}-x=\dfrac{e^{x}-1-x(xe^{x}+1)}{xe^{x}+1}=\dfrac{(x+1)(e^{x}-xe^{x}-1)}{xe^{x}+1}$ ،

و منه : $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$ ، **و هو المطلوب .**

**ب) دراسة إتجاه تغير الدالة $u$ ، واستنتاج إشارة $u(x)$ :** ---------------------------------------------

الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ : $u'(x)=e^{x}-(e^{x}+xe^{x})=-xe^{x}$ ، و منه : $u(x)\le 0$ .

إذن $u$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ، و لدينا أيضا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty \\ u(0)=0 \end{cases}$ ، من هذا و ذاك نستنتج أن :

$u(x)\le 0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ .

**ج) إستنتاج الوضعية النسبية للمنحني $(C_f)$ بالنسبة لـ $(T)$:** ----------------------------------------

لاستنتاج وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ يكفي

دراسة إشارة : $\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$ .

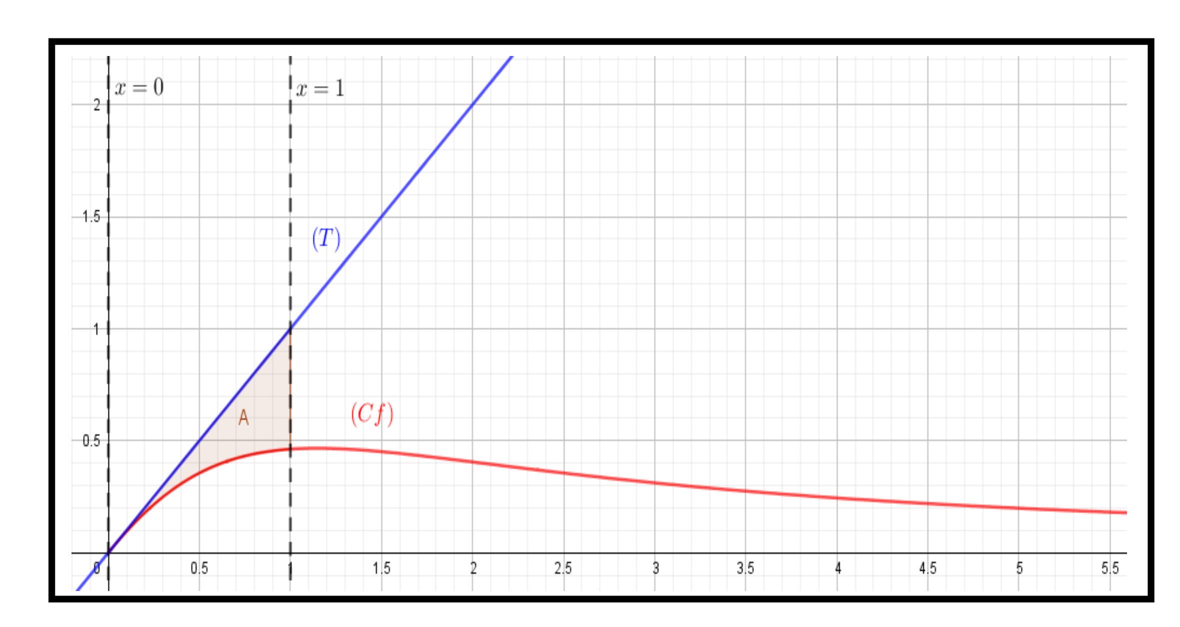
لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ : $xe^{x}+1\ge 0$ ، إذن الإشارة

من إشارة $(x+1)\times u(x)$ .

إذن نلخص الوضعية في الجدول المقابل .

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $(x+1)$ | $+$ | |
| $u(x)$ | $-$ | |
| $(x+1)u(x)$ | $-$ | |
| الوضعية | $(T)$ يمس $(C_f)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(T)$ |

د) رسم كلا من $(T)$ و المنحني $(C_f)$ : ------------------------------------------------------------




**الجزء الثالث :**

**1) تعيين دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على المجال** $[0;+\infty[$ : ---------------------------------------------

نستعمل هنا العبارة التالية : $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، نلاحظ أنّ : $f(x)=\frac{U'}{U}$ ، و منه :

$F(x)=\ln(x+e^{-x})+c$ ، حيث $c$ ثابت حقيقي .

**2) حساب بـ $cm^2$ مساحة الحيز المحدد بـ $(C_f)$ وَ $(T)$ و محور التراتيب و** $x=1$ :--------------------

$A=\int_0^1 x-f(x)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx$ ، أي :

$A=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\left[\ln(x+e^{-x})\right]_0^1=\frac{1}{2}-\left(\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)\right)\approx 0,1867$ .

**حساب** $A$ بـ $cm^2$ : أي : $0,1867\times 16=2,9872cm^2$ . و منه : $\boxed{A=2,9872cm^2}$ .

**كتابة الاستاذ :** بلقاسم عبدالرزاق






# التَصْحِيحْ المفصّل للبكالوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 02

## تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

1) لدينا (▲) ... $(z-i)(z^2+2z+2)=0$ يكافئ $\begin{cases} z-i=0\,;z=i \\ z^2+2z+2=0 \;...(\spadesuit) \end{cases}$

حلول المعادلة(♠) : $\Delta=-4=(2i)^2$ ومنه $z_1=\dfrac{-2+2i}{2}=-1+i$ و $z_2=\overline{z_1}=-1-i$

الخلاصة: حلول المعادلة (▲) ، $S=\{i\,;-1-i\,;-1+i\}$

2) أ) التحقق أن $D$ مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$ : ------------------------------------------------

يكفي التحقق أن $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي $z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}=0$

لدينا، $z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}=z_A-z_D-(z_B-z_D)-(z_C-z_D)=z_A-z_B-z_C-z_D=i-2+1+i-1+2i=0$

الخلاصة: $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

ب) كتابة العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي: ------------------------------------------------------

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}=\frac{1-2i-i}{2+1+i}=\frac{1-3i}{3+i}=\frac{-i\,(i+3)}{3+i}=-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

التفسير الهندسي :

$\left|\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right|=1$ يكافئ $AD=BC$

$\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ يكافئ $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\;/\,k\in\mathbb{R}$

طبيعة الرباعي $ABDC$ :

بما أن $AD=BC$ و $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CB}$
فإن الرباعي $ABDC$ مربع لأن
قطريه متساويين و متعامدين

ج) كتابة العدد $-4+4i$ على الشكل الأسي و حساب $(-4+4i)^{2018}$ : ----------------------------------

الشكل الاسي لـ $-4+4i$ : لدينا ، $|-4+4i|=|-4(1-i)|=|-4||1-i|=4\sqrt{2}$

لتكن $\theta$ عمدة لـ $-4+4i$ ومنه $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{-4}{4\sqrt2}=-\dfrac{\sqrt2}{2}\\[2mm] \sin\theta=\dfrac{4}{4\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}\end{cases}$ ومنه نجد، $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ ⇦ $-4+4i=4\sqrt2e^{\frac{3\pi}{4}i}$

- حساب $(-4+4i)^{2018}$ : $(-4+4i)^{2018}=\left(4\sqrt2e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^{2018}=\left(4\sqrt2\right)^{2018}e^{\frac{6054\pi}{4}i}=\left(4\sqrt2\right)^{2018}e^{\frac{3\pi}{2}i}=\left(4\sqrt2\right)^{2018}(-i)$

3) أ) حساب $z'-i$ : ------------------------------------------------------------------------------

$$z'-i=\frac{iz-4+2i}{z-2}-i=\frac{iz-4+2i-i\,(z-2)}{z-2}=\frac{iz-4+2i+iz+2i}{z-2}=\frac{-4+4i}{z-2}$$

ب) ---------------------------------------------------------------------------------------------

لدينا، $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$ ، أي: $|z'-z_A|=\dfrac{|-4+4i|}{|z-z_B|}$ ، ومنه : $AM'=\dfrac{4\sqrt2}{BM}$ أي: $AM'\times BM=4\sqrt2$

ومن جهة أخرى نجد : $\arg(z'-i)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-2}\right)$ ، ومنه: $\arg(z'-z_A)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-z_B}\right)$ ، أي :

$\arg(z'-z_A)=\arg(-4+4i)-\arg(z-z_B)$ ، ومنه: $\arg(z'-z_A)+\arg(z-z_B)=\arg(-4+4i)$ ،

أي : $/ \ k \in \mathbb{R}$ $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ .

**4) أ) التحقق أن $E$ تنتمي إلى $(\Gamma)$** : ------------------------------------------------

لدينا، $z'-i=\frac{-4+4i}{z_E-2}=\frac{-4+4i}{2+i-2}=\frac{-4+4i}{i}=4+4i$

ومنه $\arg(z'-i)=\arg(4+4i)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

**الخلاصة:**
النقطة $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$

**ب) تعيين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$** : ------------------------------------------------

$\arg(z'-i)=\frac{\pi}{4}$ يكافئ $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=\frac{\pi}{4}$ و لدينا، $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=\frac{3\pi}{4}-\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)$ ومنه $\frac{3\pi}{4}-\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{4}$

ومنه $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه : مجموعة النقط $M$ من المستوي هي : **نصف المستقيم** المفتوح $]BE)$ الذي رؤسه $B$ و الموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $\left(\vec{u};\vec{w}\right)=\frac{\pi}{2}$ .

| تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية) | التنقيط |
|---|---|

**لدينا :** $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1} \end{cases}$ .

**1) إثبات أنّ $0<u_n<2$:** ------------------------------------------------

نضع : $P(n):0<u_n<2$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي : $0<u_0<2$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ . أي نفرض أن $0<u_n<2$ صحيحة و نبين أن : $0<u_{n+1}<2$ .

- لدينا فرضا أنّ: $0<u_n<2$، إذن : $\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}>0$ ، أي : $u_{n+1}>0$ . **يبقى أن نبيّن أنّ :** $u_{n+1}<2$ .

**نحسب** $u_{n+1}-2$ **:** $\frac{u_n^2(u_n-2)}{u_n^2+1}=\frac{u_n^3-2u_n^2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^3+2-2u_n^2-2}{u_n^2+1}=u_{n+1}-2=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-2$ ، بما أنّ : $u_n<2$ ،

فرضا ، إذن : $u_n-2<0$ ، و منه : $u_{n+1}-2<0$ ، إذن : $u_{n+1}<2$ ، **وعليه :** $0<u_{n+1}<2$ .

و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

**2) دراسة رتابة المتتالية $(u_n)$:** ------------------------------------------------

من أجل كل عدد طبيعي $n$ ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ :

لدينا: $\frac{2-u_n}{u_n^2+1}>0$ $=\frac{-u_n^3+2-u_n^3-u_n}{u_n^2+1}=u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-u_n$ ، لأنّ : لدينا $u_n<2$ ، إذن : $2-u_n>0$ .

و منه المتتالية $(u_n)$ **متزايدة** على $\mathbb{N}$ .

**3)إستنتاج أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة و حساب نهايتها:** ------------------------------------------------

بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة وَ محدودة من الأعلى بـ 2 ، إذن هي **متقاربة** .

**- نهاية $(u_n)$ :** $(u_n)$ متقاربة معناه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ ، لدينا: $u_{n+1}=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$ ، أي: $l=\frac{l_n^3+2}{l_n^2+1}$ ،

ومنه : $l^3+l=l^3+2$ ، إذن: $\boxed{l=2}$.

**4) أ)بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ :** $2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$ ----------------------------------------

**نحسب الفرق** $2-u_{n+1}$ **:** $2-u_{n+1}=2-\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}=\frac{2u_n^2+2-u_n^3-2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}$ .

**نقارن النتيجة مع** $\frac{4}{5}(2-u_n)$ **:**

$\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)=(2-u_n)\left[\frac{u_n^2}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}\right]=(2-u_n)\left(\frac{5u_n^2-4u_n^2-4}{5(u_n^2+1)}\right)=(2-u_n)\left(\frac{u_n^2-4}{5(u_n^2+1)}\right)$ ،

أي : $\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)=(2-u_n)\left(\frac{(u_n-2)(u_n+2)}{5(u_n^2+1)}\right)=\frac{-(u_n-2)^2(u_n+2)}{5(u_n^2+1)}<0$ ،

إذن : $2-u_{n+1}<\frac{4}{5}(2-u_n)$ .

**ب) إثبات أنّ** $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، **ثم تعيين نهاية** $(u_n)$ **من جديد :** ----------------------------------------

**لدينا من السؤال أ) :** $0\le 2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$ ، إذن : $\begin{cases}0\le 2-u_1\le\frac{4}{5}(2-u_0)\\0\le 2-u_2\le\frac{4}{5}(2-u_1)\\ \vdots\\0\le 2-u_n\le\frac{4}{5}(2-u_{n-1})\end{cases}$ **بالضرب نجد :**

$0\le(2-u_1)(2-u_2)\times...\times(2-u_n)\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-u_0)(2-u_1)\times...\times(2-u_{n-1})$ ، باختزال نحصل على :

$0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-u_0)$ ، أي: $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-1)$ ، **ومنه :** $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$ .

**نهاية** $(u_n)$ **:** بما أنّ: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ ، **حسب النهايات بالحصر :** $\lim_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$ ، **ومنه :** $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n)=2}$

| **تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)** **(الهندسة الفضائية)** | التنقيط |
|---|---|

**لدينا :** $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$ .

**1) أ) بيان أن النقط** $A;B;C$ **تعيّن مستويا :** ----------------------------------------

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ، $\left(\frac{1}{-2}\neq\frac{-1}{-2}\right)$ . أي $\overrightarrow{AB}$ **و** $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا ، و منه النقط

$A;B;C$ تعيّن مستويا .

**ب) التحقق أنّ** $(P)$ **هو المستوي** $(ABC)$ : ----------------------------------------

لدينا: $(P):2x+y-2z+4=0$ ، و $A(3;2;6)$ . **بالتعويض :** $6+2-12+4=0$ ، و منه : $A\in(P)$ .

بنفس الطريقة نبيّن أنّ : $B\in(P)$ **و** $C\in(P)$ . و منه نستنتج أنّ المستوي $(P)$ **هو** $(ABC)$ .

**2) أ) بيان أنّ المثلث** $ABC$ **قائم :** ----------------------------------------

نلاحظ أنّ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2=0$ ، إذن : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ و منه المثلث $ABC$ قائم في $A$ .

**ب) كتابة تمثيل وسيطي لـ** $(\Delta)$ **المار بـ** $O$ **و يعامد** $(P)$ **:** ----------------------------------------

$(\Delta)$ يعامد $(P)$ أي : $\vec{n}(2;1;-2)$ يعتبر شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ و منه التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ يكون :

$(\Delta):\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$ ، حيث : $t\in\mathbb{R}$ .

**ج) حساب الطول** $OK$ : ------------------------------------------------------------------------------------

بما أنّ $k$ هي المسقط العمودي لـ $O$ على $(P)$ ، إذن ستكون $k$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع $(P)$ .

لحساب إحداثيات النقطة $k$ نعوض تمثيل $(\Delta)$ في معادلة $(P)$ **نجد** : $2(2t)+t-2(-2t)+4=0$ ، أي :

$9t=-4$ ، و منه : $t=\frac{-4}{9}$ . و منه : $K\left(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9}\right)$ .

**3)** $G$ مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$ :

**أ) حساب إحداثي النقطة** $G$ : ------------------------------------------------------------------------

$G\begin{cases}x=\frac{3(0)+1(3)+1(1)+1(4)}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\\y=\frac{3(0)+1(2)+1(2)+1(-2)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\\z=\frac{3(0)+1(6)+1(4)+1(5)}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\end{cases}$ ، و منه : $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$ .

**ب) حساب المسافة بين النقطة** $G$ **و المستوى** $(P)$ : ---------------------------------------------

$d(G;(P))=\frac{\left|\frac{4}{3}\times2+\frac{1}{3}\times1+\frac{5}{2}(-2)+4\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5+4\right|}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$ ، و منه : $\boxed{d(G;(P))=\frac{2}{3}}$.

**4)** $(\Gamma)$**مجموعة النقط** $M$ **من الفضاء حيث:** $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$ :

**أ) عين طبيعة مجموعة النقط** $(\Gamma)$ **و عناصرها المميزة** : -----------------------------------------

$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=5$ ، أي : $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{5}{6}$ ، **و منه :** $MG=\frac{5}{6}$ ، إذن $(\Gamma)$ هي **سطح كرة** مركزها $G$ و نصف قطرها : $R=\frac{5}{6}$ .

**ب) طبيعة** $(\Gamma)\cap(P)$ : ------------------------------------------------------------------------------

بما أنّ : $d(G;(P))<R$ ، فإنّ : $(\Gamma)\cap(P)$ هي دائرة .

**ج) حساب حجم رباعي الوجوه** $GABC$ : --------------------------------------------------------------

$V_{GABC}=\frac{1}{3}\times V_{ABC}\times h$ ، **مساحة المثلث** $ABC$ : $V_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{12}{2}=6$ .

$h$ : **هي المسافة بين** $G$ **و** $(P)$ ، و منه : $h=\frac{2}{3}$ .

**الآن نحب حجم الرباعي** $GABC$ : $V_{GABC}=\frac{1}{3}\times6\times\frac{2}{3}$ ، **و منه :** $\boxed{V_{GABC}=\frac{4}{3}(u.a)}$

| تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدالة اللوغاريتمية) | التنقيط |
|---|---|

**الجزء الأول:** لدينا : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$ .

**1) التحقق أنّ :** $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$ : ---------------------------------------------

$(x-1)(3x^2+3x+2)=3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2=3x^2-x-2$ .

**ب) تعيين نهايات الدالة** $g$ : ---------------------------------------------------------------------------

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x^3-x-2\ln x+3)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}x^3-x=0\\\lim\limits_{x\to0}-2\ln x=+\infty\end{cases}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x^2-1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{3}{x}\right)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0\end{cases}$ .

**2) أ) دراسة إتجاه تغير الدالة $g$ و تشكيل جدول تغيّراتها : ---------------------------------------------**

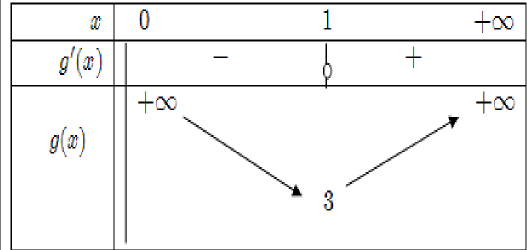
الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$g'(x)=3x^2-1-\frac{2}{x}=\frac{3x^3-x-2}{x}=\frac{(x-1)(3x^2+x+2)}{x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة : $(x-1)(3x^2+3x+2)$ .

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x^2+x+2$ | | $+$ | | $+$ | |
| $3x^3-x-2$ | | $-$ | | $+$ | |

**جدول التغيرات :**



**ب) إستنتاج إشارة $g(x)$ : ----------------------------**

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ : $g(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، ( القيمة الصغرة لـ $g$ هي 3 ) .

**الجزء الثاني :** لدينا $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$ .

**1) حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و تفسير النتيجة هندسيا : -----------------------------------------------------**

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(x-1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x^2=0^+\end{cases}$ .

**التفسير :** $(C)$ يقبل مقارب عمودي هو محور التراتيب بجوار $-\infty$ .

**2) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$ .

**3) بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ مقارب لـ $(C)$ بجوار $+\infty$ : ----------------------------------------**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=0$ ، و منه $(\Delta)$ مقارب مائل لـ $(C)$ بجوار $+\infty$ .

**الوضعية النسبية :** $f(x)-y=\frac{x-1+\ln x}{x^2}$ ، نلخص الوضعية في الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضعية | | $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C)$ يقطع $(\Delta)$ عند $(1;0)$ | $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |

**4) دراسة إتجاه تغير الدالة $f$ و تشكيل جدول تغيّراتها ---------------------------------------------**

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=1+\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-2x(x-1+\ln x)}{x^4}=1+\frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x^4-x^2+3x-2x\ln x}{x^4}$$

**أي :** $f'(x)=\frac{x(x^3-x-2\ln x+3)}{x^4}=\frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$ .

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ .

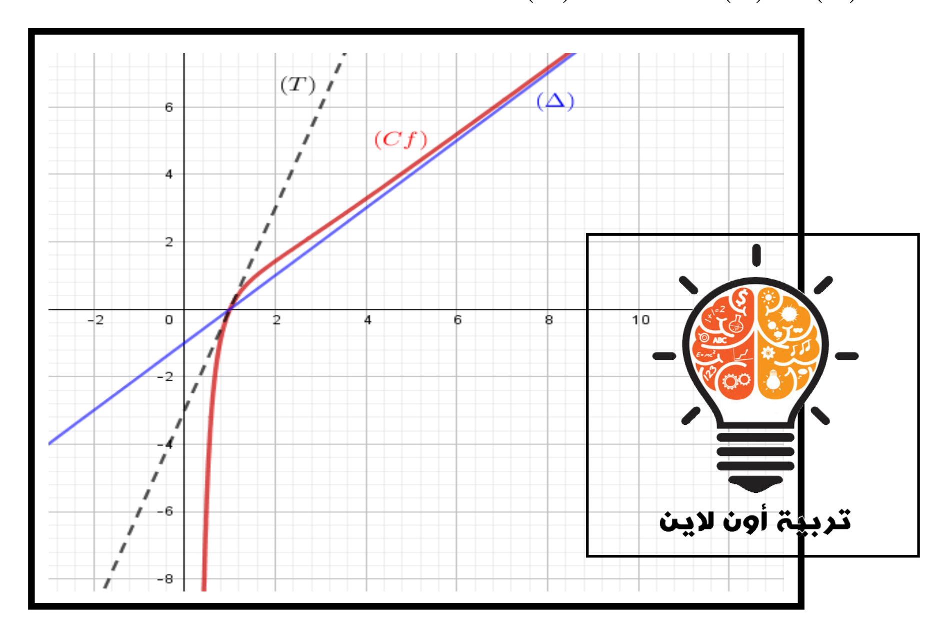
إذن **جدول تغيرات** الدالة $f$ يكون كا التالي :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

**5) كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ عند النقطة $A(1;0)$ :** ------------------------------------

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي : $(T): y = 3(x-1)+0$ ، و منه : $\boxed{(T): y = 3x-3}$.

**6) رسم كلا من $(T)$ و $(\Delta)$ و المنحنى $(C)$ :** ------------------------------------------------------




**7) لدينا $(d_m): y = mx - m$ :** ---------------------------------------------------------------------

**أ) التحقق أنّ $(d_m)$ تمر بالنقطة $A$ :** $0 = m(1) - m$ أي : $m - m = 0$ ، و منه $A$ تنتمي إلى $(d_m)$ .

**ب)** المعادلة $f(x) = mx - m$ تقبل حلان متمايزان إذا كان : $\boxed{1 < m < 3}$.

**حيث :** 1 هو معامل توجيه $(\Delta)$ و 3 هو معامل توجيه $(T)$ .

**الجزء الثالث : 1) بيان أنّ** $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{2}{e}$ : ----------------------------------------------------------

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \left(\underbrace{\ln x}_{v} \times \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'}\right)dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}dx$ ، أي :

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = \left(-\frac{\ln e}{e} - \frac{1}{e}\right) - (-\ln 1 - 1) = 1 - \frac{2}{e}$ ، **و منه :** $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{2}{e}$ .

**2) حساب مساحة الحيّز :** -------------------------------------------------------------------------------

$A = \int_1^e [f(x) - y]dx = \int_1^e \left(\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x}\right)dx$ ، أي :

$A = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^e + \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \left(\ln e + \frac{1}{e}\right) - (\ln(1) + 1) + \left(1 - \frac{2}{e}\right) = 1 + \frac{1}{e} - 1 + 1 - \frac{2}{e}$ ، **و منه :** $\boxed{A = 1 - \frac{1}{e}(ua)}$




**كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق**



# الموضوع التجريبي رقم 02

## التمرين الأول : (05 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ نفرض الأعداد :

$a_n = 4\times 10^n - 1$ ، $b_n = 2\times 10^n - 1$ ، $c_n = 2\times 10^n + 1$ .

1) أ) أحسب $a_n$ ، $b_n$ وَ $c_n$ من أجل $n$ يساوي 1 ، 2 وَ 3 .

ب) ما هو عدد أرقام العددين $a_n$ وَ $c_n$ ؟.

✓ بيّن أنّ العددين $a_n$ وَ $c_n$ يقبلان القسمة على 3 .

ج) بيّن أنّ العدد $b_3$ أوّلي .

د) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $b_n \times c_n = a_{2n}$ .

✓ إستنتج تحليلا إلى عوامل أوّلية للعدد $a_6$ .

ه) بيّن أنّ : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$ . ثمّ إستنتج أنّ $b_n$ وَ $c_n$ أوّليان فيما بينهما .

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $b_3x + c_3y = 1......(1)$ .

أ) برّر أنّ المعادلة $(1)$ تقبل على الأقل حلاّ .

ب) طبّق خوارزمية إقليدس على $b_3$ وَ $c_3$ لإيجاد حلا خاصا للمعادلة $(1)$ .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$ .

## التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ( الوحدة $6cm$ ) . نعتبر التحويل $f$ للمستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ ، حيث : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ .

و لتكن النقطة $M_0$ ذات اللاحقة $z_0$ ، حيث : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

وَ نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $M_{n+1} = f(M_n)$ ، وَ نسمي $z_n$ لاحقة النقطة $M_n$ .

1) عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل $f$ ، ثمّ علّم النقط : $M_0$ ، $M_1$ ، $M_2$ ، $M_3$ .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ .

3) $n$ وَ $p$ عددان طبيعيان . برهن أنّ النقطتان $M_n$ وَ $M_p$ متطابقتان إذا وافقط إذا كان $(n-p)$ مضاعفا لـ 12 .

4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x - 5y = 3$ ، علما أنّ : $(4;9)$ حلاّ خاصا لها .

ب) إستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ ، بحيث النقطة $M_n$ تنتمي إلى نصف المستقيم $[ox)$ .

## التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعرّف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية $(u_n)$ كما يلي : $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$ .

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ يكون: $u_{n+1} \le 0{,}95u_n$ ، إذا وافقط إذا كان: $(1+\dfrac{1}{n})^{10} \le 1{,}9$ .

2) نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^{10}$ .

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثم أحسب نهايتها عند $+\infty$ .

ب) بيّن أنّه يوجد عدد وحيد $\alpha$ من المجال $[1;+\infty[$ بحيث : $f(\alpha)=1{,}9$ .

ج) عيّن العدد الطبيعي $n_0$ ، بحيث : $n_0 - 1 < \alpha < n_0$ .

د) برهن أنّه من أجل كل $n \ge 16$ ، يكون : $(1+\dfrac{1}{n})^{10} \le 1{,}9$ .

3) أ) عيّن إتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ إبتداءا من الرتبة 16 .

ب) ماذا نستنتج بالنسبة لهذه المتتالية ؟

4) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل $n \ge 16$ : $0 \le u_n \le (0{,}95)^{n-16} \times u_{16}$ . ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$ .

## التمرين الرابع : (07 نقاط)

**الجزء الأوّل :** نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}$ .

1) أحسب كلا من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x \in ]0;+\infty[$ .

4) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $[2;3]$ يكون : $g(x) < \dfrac{1}{2}$ .

**الجزء الثاني :** لتكن الدّالة $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x\ln(\dfrac{x+2}{x})+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} ; (x>0) \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ .

$(C)$ هو المنحنى الممثّل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(\dfrac{x+2}{x})$ . ثمّ بيّن أنّ الدالة $f$ مستمرة عند 0 .

2) هل الدالة $f$ تقبل الإشتقاق عند 0 ؟ . أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المحصّل عليها .

3) أدرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، تحقّق أنّ : $f'(x)=g(x)$ .

4) أ) علما أنّ : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(h+1)}{h}=1$ ، برهن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\dfrac{x+2}{x})=2$ .

ب) إستنتج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

ج) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ مقارب مائل لـ $(C)$ بجوار $+\infty$ .

5) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ ، ثمّ أرسم كلا من $(\Delta)$ وَ $(C)$ .

## التمرين الخامس : (05 نقاط)

زهرة نرد مكعبة الشكل وجوهها مرقّمة بالأرقام من $1$ إلى $6$ ، $p_k$ هو إحتمال الحصول على الرقم $k$ ، $(1 \leq k \leq 6)$ . هذه الزّهرة مغشوشة بحيث :

✓ الأعداد : $p_1$ ، $p_2$ ، $p_3$ ، $p_4$ ، $p_5$ ، $p_6$ تشكّل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها $r$ .

✓ وَ الأعداد : $p_1$ ، $p_2$ ، $p_4$ تشكّل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها $q$ .

1) برهن أنّ : $p_k = \dfrac{k}{21}$ ، من أجل : $1 \leq k \leq 6$ .

2) نرمي هذه الزّهرة مرّة واحدة ، وَ نعتبر الحوادث التالية :

❖ $A$ : " العدد المحصّل عليه زوجي " .

❖ $B$ : " العدد المحصّل عليه أكبر من أو يساوي $3$ " .

❖ $C$ : " العدد المحصّل عليه $3$ أو $4$ " .

أ) أحسب إحتمال كل حادثة .

ب) أحسب إحتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي $3$ ، علماً أنّه زوجي . ( **خاص بشعبة الرّياضي** )

ج) الحادثتان : $A$ وَ $B$ هل هما مستقلتان ؟ . الحادثتان : $A$ وَ $C$ هل هما مستقلتان ؟ .

3) نستعمل الآن هذه الزّهرة لإحواء اللّعبة التالية :

لدينا صندوق $U_1$ يحتوي على كرة واحدة بيضاء وَ $3$ كرات سوداء ، و صندوق $U_2$ يحتوي على كرتين بيضاوين وَ كرة سوداء واحدة . يأتي لاعب وَ يرمي الزّهرة :

✓ إذا حصل على رقم زوجي سحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق $U_1$ .

✓ إذا حصل على رقم فردي سحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق $U_2$ .

اللاّعب يعتبر رابحاً إذا سحب كرة بيضاء ، و نسمي $G$ الحادثة : " اللاّعب رابح " .

أ) عيّن إحتمال الحادثة $A \cap G$ ، ثمّ إحتمال الحادثة $G$ .

ب) علما أنّ اللاّعب رابح ، عيّن إحتمال أن يكون حصل على عدد زوجي . ( **خاص بشعبة الرّياضي** ) .

## خاص بشعبتي الرياضي وَ التقني رياضي

# تصحيح الموضوع رقم 02

## تصحيح التمرين الأول :

1) أ) $\begin{cases} a_1 = 39 \\ b_1 = 19 \\ c_1 = 21 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a_2 = 399 \\ b_2 = 199 \\ c_2 = 201 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a_3 = 3999 \\ b_3 = 1999 \\ c_3 = 2001 \end{cases}$ . ب) عدد أرقام $a_n$ وَ $b_n$ هو : $n+1$ .

✓ بما أنّ : $10 \equiv 1[3]$ إذن : $10^n \equiv 1[3]$ ، ومنه : $4\times10^n \equiv 4[3]$ ، أي : $4\times10^n \equiv 1[3]$ ، أي : $4\times10^n - 1 \equiv 0[3]$ ، ومنه : $a_n \equiv 0[3]$ . وَ أيضا بنفس الطريقة : $c_n \equiv 0[3]$ .

ج) $b_3 = 1999$ ، $\sqrt{1999} \approx 44,71$ . $b_3$ لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأوّلية الأصغر من 44,71 ، إذن هو أوّلي .

د) $b_n \times c_n = (2\times10^n - 1)(2\times10^n + 1)$ ، أي : $b_n \times c_n = (2\times10^n)^2 - 1$ ، أي : $b_n \times c_n = 4\times10^{2n} - 1$ ، و منه : $b_n \times c_n = a_{2n}$ ، و هو المطلوب .

✓ إستنتاج تحليلا للعدد $a_6$ : $a_6 = b_3 \times c_3$ ، أي : $a_6 = 1999\times2001$ ، و منه : $a_6 = 1999\times3\times23\times29$ .

ه) نعلم أنّ : $PGCD(a;b) = PGCD(a;a-b)$ ، إذن : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;c_n - b_n)$ ، أي : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$ ، لكن العدد $c_n$ فردي $(c_n = 2\times10^n + 1)$ ، إذن : $PGCD(c_n;2) = 1$ ، و منه : $PGCD(b_n;c_n) = 1$ . و منه فإنّ : $b_n$ وَ $c_n$ أوّليان فيما بينهما .

2) لدينا المعادلة $(1)$......$b_3x + c_3y = 1$ :

أ) بما أنّ $b_3$ وَ $c_3$ أوّليان فيما بينهما ، إذن حسب مبرهنة **بيزو** المعادلة $(1)$ تقبل على الأقل حلا .

ب) لدينا : $\begin{cases} 2001 = 1999\times1 + 2 \\ 1999 = 999\times2 + 1 \end{cases}$ ، إذن : $1999 - 2\times999 = 1$ ، أي : $1999 - (2001 - 1999)\times999 = 1$ ، أي : $1999 - 999\times2001 + 999\times1999 = 1$ ، و منه : $1000\times1999 - 999\times2001 = 1$ .

إذن : $(1000;-999)$ حل خاص للمعادلة $(1)$ .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$ : $1999x + 2001y = 1$ ، و لدينا : $1999(1000) + 2001(-999) = 1$ ، بالطرح نجد : $1999(x - 1000) + 2001(y + 999) = 0$ ، $1999(x - 1000) = -2001(y + 999)$ ،

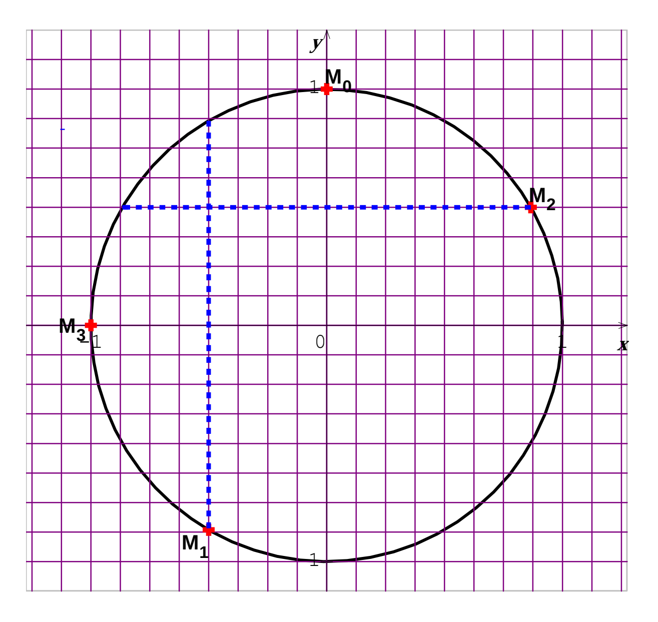
حسب **غــوص** : $\begin{cases} x = 2001k + 1000 \\ y = -1999k - 999 \end{cases}$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$ .

## تصحيح التمرين الثاني :

1) طبيعة التحويل $f$ : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftarrow f$ هو دوران مركزه $O$ وَ زاويته $\frac{5\pi}{6}$ .

2) البرهان من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$ ، **لنستعمل البرهان بالتراجع :**

✓ نتحقّق من أجل $n = 0$ : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\times\frac{5\pi}{6})}$ ، أي : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ ، ( **محققة** ) .




✓ نفرض صحة : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ .

✓ نبرهن صحة : $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6})}$ .

**البرهان :** نعلم أنّ : $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n$ ، وَ لدينا فرضا : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$

، أي : $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، أي :

$z_{n+1} = e^{i\left[\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}\right]}$ ، أي : $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6}\right]}$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ .

3) $M_n$ وَ $M_p$ متطابقتان معناه أنّ : $z_n = z_p$ ، أي : $e^{i(\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، و هذا معناه أنّ :

$\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6}+2k\pi = \frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}$ ، أي : $p\frac{5\pi}{6}+2k\pi = n\frac{5\pi}{6}$ ، أي : $n\times 5\pi = p\times 5\pi + 12k\pi$ ، أي :

$5n = 5p+12k$ ، أي : $5n-5p = 12k$ ، ومنه : $5(n-p) = 12k$ . $12 \,/\, 5(n-p)$ وَ 12 أوّلي مع 5 ،

حسب غوص : 12 يقسم $(n-p)$ ، أي أنّ : $(n-p)$ مضاعف لـ 12 .

4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x-5y=3$ : $12(4)-5(9)=3$ — $12x-5y=3$ ، أي : $12(x-4)=5(y-9)$ ،

حسب غوص نستنتج أنّ : $\begin{cases} x = 5k+4 \\ y = 5k+9 \end{cases}$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$ .

ب) $M_n \in [ox)$ معناه أنّ : $z_n$ حقيقي موجب ، أي : $\arg(z_n) = 0+2k\pi$ ، أي : $\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6} = 2k\pi$ ، أي :

$3\pi+5n\pi = 12k\pi$ ، أي : $3+5n = 12k$ ، أي : $12k-5n=3$ ، إذن : $n = y = 12k+9$ . $k \in \mathbb{N}$ .

## تصحيح التمرين الثالث :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ المتتالية $(u_n)$ معرّفة كما يلي : $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$ .

1) **البرهان :** لدينا $u_{n+1} \le 0{,}95u_n$ معناه أنّ : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 0{,}95$ ، لأنّ : $(u_n > 0)$ وَ $(u_{n+1} > 0)$ ، أي : $\frac{\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{2^n}} \le 0{,}95$

أي : $\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^{10}} \le 0{,}95$ ، أي : $(1+\frac{1}{n})^{10} \times \frac{1}{2} \le 0{,}95$ ، ومنه : $(1+\frac{1}{n})^{10} \le 1{,}9$ .

2) $f$ الدالة المعرّفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$ :

أ) **إتجاه التغيّر :** $f'(x) = 10\times(1+\frac{1}{x})^9 \times(-\frac{1}{x^2})$ ، نلاحظ أنّ : $f'(x) < 0$ على $[1;+\infty[$ ، و منه الدالة $f$ متناقصة.

| $x$ | $1$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $1024$ ↘ $1$ |

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ .

ب) الدالة $f$ مستمرة و رتيبة على $[1;+\infty[$ ، وَ صورة المجال $[1;+\infty[$ هي $]1;1024]$ ، وَ $1,9 \in ]1;1024]$ ، ومنه المعادلة $f(\alpha) = 1,9$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، حيث : $\alpha \in [1;+\infty[$ .

ج) بالحاسبة نجد : $15 < \alpha < 16$ ، أي : $(n_0 = 16)$ .

د) **البرهان :** من أجل $n \geq 16$ يكون : $f(n) \leq f(16)$ ( لأنّ الدالة $f$ متناقصة ) ، أي : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq f(16)$ ،

و لدينا : $f(16) < 1,9$ ، و منه : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$ .

3) أ) من أجل $n \geq 16$ لدينا : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$ معناه أنّ : $u_{n+1} \leq 0,95 u_n$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 0,95 < 1$ ، و منه فإنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

ب) بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة وَ محدودة من الأسفل بـ $0$ لأنّ : $(u_n > 0)$ ، ومنه فإنها **متقاربة.**

4) إثبات أنّ : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ، من أجل $n \geq 16$ : ( نستعمل البرهان بالتراجع ) .

✓ نتحقّق من أجل $n = 16$ : $0 \leq u_{16} \leq (0,95)^{16-16} \times u_{16}$ ، ومنه : $0 \leq u_{16} \leq u_{16}$ ، **محققة.**

✓ نفرض صحة : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ .

✓ و نثبت صحة : $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n+1-16} \times u_{16}$ ، أي : $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$ .

**البرهان :** لدينا فرضا : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ، أي : $0 \leq 0,95 \times u_n \leq 0,95 \times (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ ، أي : $0 \leq 0,95 u_n \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$ ، وَ لدينا : $u_{n+1} \leq 0,95 u_n$ ، ومنه : $0 \leq u_{n+1} \leq (0,95)^{n-15} \times u_{16}$ .

إذن من أجل كل $n \geq 16$ : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$ .

❖ إستنتاج نهاية $(u_n)$ : $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 0$ ، لأنّ : $\lim_{n\to+\infty} (0,95)^{n-16} = 0$ ( حسب خاصية النهايات بالحصر ) .

## تصحيح التمرين الرابع :

**الجزء الأوّل :** $g$ الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ .

1) **حساب النهايات :** $\lim_{x\underset{>}{\to}0} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{4}$ ، لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{x+2}{x}) = 0$ وَ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+2} = 0$ .

2) **إتجاه التغيّر :** $g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2}$ ، أي : $g'(x) = \frac{x-x-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$ ، أي :

$g'(x) = \frac{-2(x+2)}{x(x+2)^2} + \frac{2x}{x(x+2)^2}$ ، ومنه : $g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$ ، أي : $g'(x) < 0$ .

وَ منه نقول أنّ الدالة $g$ مناقصة على $]0;+\infty[$ .

| $x$ | $0$ $\qquad$ $-\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ $\frac{1}{4}$ |

3) من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $g(x) \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، و منه : $g(x) > 0$

4) من أجل : $2 \leq x \leq 3$ ، أي : $g(3) \leq g(x) \leq g(2)$ ، أي :

$0,36 \leq g(x) \leq 0,44$ ، و منه : $g(x) < \frac{1}{2}$ .

**الجزء الثّاني :** لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}; (x > 0) \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ .

1) **حساب النهاية :**

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(\frac{x+2}{x}) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left[x\ln(x+2) - x\ln(x)\right] = 0$ .

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{1}{2}$ ، وَ لدينا : $f(0) = \frac{1}{2}$ ، وَ منه الدالة $f$ مستمرة عند $0$ .

2) **دراسة قابلية إشتقاق الدالة $f$ عند $0$** ، أي نحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x}$ ، أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\left[\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{1}{4}\right]}{x}$ ، أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left[\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{1}{4}\right] = -\infty$ .

و منه الدالة $f$ لا تقبل الإشتقاق عند $0$ .

❖ إذن المنحنى $(C)$ يقبل نصف مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الإحداثيات : $(0;\frac{1}{2})$ .

3) بعدحساب $f'(x)$ ، سنلاحظ أنّ : $f'(x) = g(x)$ . وَ بما أنّ $g(x) > 0$ على $]0;+\infty[$ ،

إذن نقول أنّ الدالة $f$ متزايدة على $]0;+\infty[$ .

4) أ) نعلم أنّ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$ ، تبيين أنّ : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(1 + \frac{2}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 \times \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{2}{x}}$ ،

بوضع : $\frac{2}{x} = t$ ، أي : $\begin{cases} x \to +\infty \\ t \to 0 \end{cases}$ ، و منه نجد : $\lim\limits_{t \to 0} 2 \times \frac{\ln(1+t)}{t} = 2$ ، لأنّ : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ .

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2$ ، و هو المطلوب .

ب) **إستنتاج النهاية :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty \end{cases}$ .

ج) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - y\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{5}{2}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\ln(\frac{x+2}{x}) - 2\right] = 0$ ،

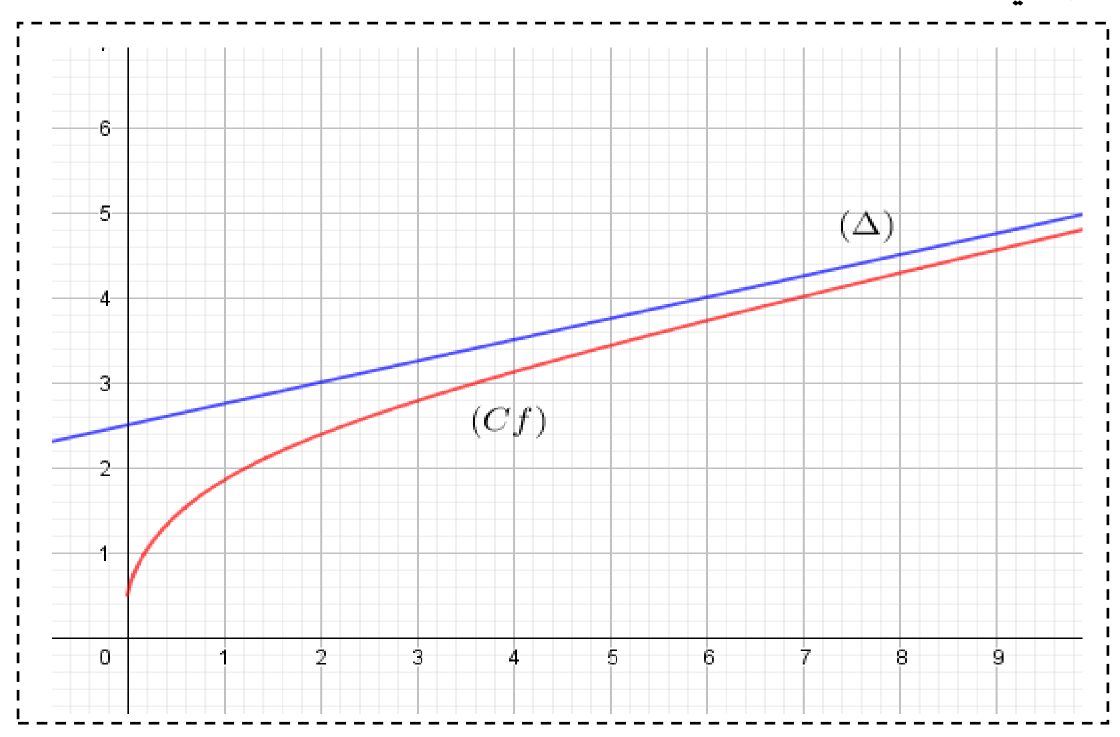
إذن نقول أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ مقارب مائل لـ $(C)$ بجوار $+\infty$.

5) تشكيل جدول التغيّرات ، ثم رسم كلا من $(\Delta)$ وَ $(C)$ :

✓ **جدول التغيّرات :**

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ ↗ $+\infty$ |

✓ **التمثيل البياني :**




## تصحيح التمرين الخامس :

1) من أجل $1 \leq k \leq 6$ ، برهان أنّ $p_k = \frac{k}{21}$ : نعلم أنّ : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ .

✓ بما أنّها حدود لمتتالية حسابية ، فسيكون : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{(p_1 + p_6) \times 6}{2}$ أي :

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 3(p_1 + p_6)$ . إذن : $3(p_1 + p_6) = 1$ ، أي : $p_1 + p_6 = \frac{1}{3} ....(1)$ .

✓ وَ بما أنّ : $p_1$ ، $p_2$ وَ $p_4$ تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية ، فسيكون : $p_1 \times p_4 = p_2^2 ....(2)$ .

نعلم أنّ : $p_2 = p_1 + r$ ، $p_4 = p_1 + 3r$ ، $p_6 = p_1 + 5r$ .

بالتعويض في $(1)$ نجد : $p_1 + p_1 + 5r = \frac{1}{3}$ ، أي : $2p_1 + 5r = \frac{1}{3} ....(3)$ .

بالتعويض في $(2)$ نجد : $p_1 \times (p_1 + 3r) = (p_1 + r)^2$ ، أي : $p_1^2 + 3rp_1 = p_1^2 + 2rp + r^2$ ، أي :

$3rp_1 - 2rp_1 = r^2$ ، أي : $rp_1 = r^2$ ، و منه : $p_1 = r$ . الآن نعوض في $(3)$ نجد : $2p_1 + 5p_1 = \frac{1}{3}$ ، أي :

$7p_1 = \frac{1}{3}$ ، و منه : $p_1 = \frac{1}{21}$ . إذن من أجل $1 \leq k \leq 6$ سيكون :

$p_k = p_1 + (k-1)r$ ، أي : $p_k = p_1 + (k-1)p_1$ ، و منه : $p_k = \frac{k}{21}$ ، هو المطلوب .

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |

2) أ) حساب إحتمال الحوادث :

✓ $A$ : " العدد المحصّل عليه زوجي " : $p(A)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$ .

✓ $B$ : " العدد المحصّل عليه أكبر من أو يساوي 3 " : $p(B)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$ .

✓ $C$ : " العدد المحصّل عليه 3 أو 4 " : $p(C)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}=\frac{7}{21}$ .

ب) حساب الإحتمال الشرطي $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ : $p(A\cap B)=\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{10}{21}$ ، لأنّ : $A\cap B=\{4;6\}$ .

و منه : $p_A(B)=\frac{\frac{10}{21}}{\frac{12}{21}}$ ، أي : $p_A(B)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ .

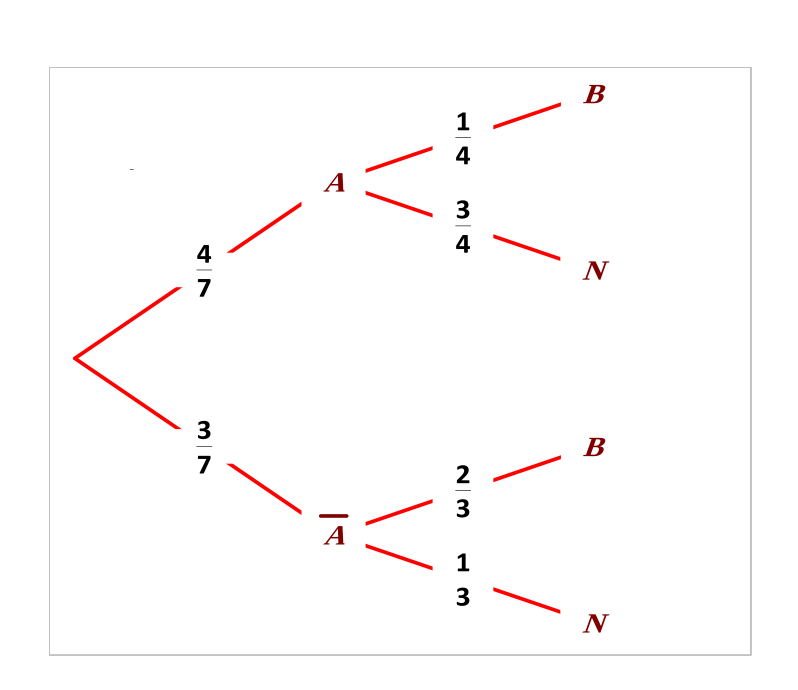
ج) لدينا : $\frac{24}{49}=\frac{4}{7}\times\frac{6}{7}=p(A)\times p(B)$ ، و $p(A\cap B)=\frac{10}{21}$ ، أي : $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$ ،

و منه الحادثتان $A$ و $B$ غير مستقلتين .

✓ نفس الطريقة بالنسبة للحادثتين $A$ و $C$ .

3) أ) تعيّين إحتمال الحادثة $A\cap G$ ، و إحتمال الحادثة $G$ :

ننمذج اللعبة على شكل شجرة الإحتمالات لتسهيل الحل . ( أنظر الشكل المقابل ) .




✓ $p(G\cap A)=p(B\cap A)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{7}$ .

✓ $p(G)=p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap \overline{A})$ ،

أي : $p(G)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{7}$ .

ب) حساب الإحتمال الشرطي :

$$p_G(A)=\frac{p(A\cap G)}{p(G)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$$ .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مـــديرية التربية لولاية غرداية

المقاطعة رقم: 01 — دورة ماي : 2017

امتــــــحان البكالوريا التجريبي — الشعبـــــــــة : الثالثة رياضيات

اختبار في مادة الرياضيات — المــــــدة : 4 ساعات ونصف

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول( 4 نقاط ) :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $2020x - 2424y = 1212 \ldots\ldots\ldots(1)$

1) أ - أحسب $PGCD(2020\ ,\ 2424)$ .

ب - استنتج أن المعادلة $(1)$ تقبل حلولا .

جـ - أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x\ ;\ y)$ حل للمعادلة $(1)$ فإن $x$ مضاعف للعدد 3.

2) استنتج حلا خاصا للمعادلة $(1)$ ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$.

3) استنتج حلول الجملة $(S)$: $\begin{cases} \lambda \equiv -1[6] \\ \lambda \equiv -4[5] \end{cases}$ .

4) $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث $a = \overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذي الاساس 5.

عين $\alpha$ و $\beta$ حتى تكون الثنائية $(a\ ;\ b)$ حلا للمعادلة $(1)$ ثم أكتب العددين $a$ و $b$ في النظام العشري .

### التمرين الثاني( 4 نقاط ) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(-\sqrt{2},1\ ,0)$ $B(0,\ 0\ ,-\sqrt{2})$,

والمستوي $(P)$ ذو المعادلة الديكارتية : $x - y - z + \sqrt{3} = 0$ .

1) أ- بين أن المستقيم $(A)$ ليس عموديا على المستوي $(P)$ .

بـ - تحقق أن الشعاع $\overrightarrow{(1\ ,0\ ,1)}$ ناظمي للمستوي $(Q)$ الذي يشمل النقطتين $A$ و $B$ والعمودي على $(P)$ .

جـ - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ .

2) لتكن $(S)$ سطح الكرة التي مركزها $O$ والمماسة للمستوي $(P)$ .

أ- أكتب معادلة ديكارتية لـ $(S)$ ثم تحقق أن المستوي $(Q)$ يمس $(S)$ .

بـ - نعتبر $I$ و $J$ نقطتي التماس لـــ $(S)$ مع المستويين $(P)$ و $(Q)$ على الترتيب. بين أن $IJ = \sqrt{2}$ .

3) لتكن $K$ المسقط العمودي للنقطة $I$ على المستوي $(Q)$ .

أ- حدد طبيعة الرباعي $OIKJ$ .

بـ - استنتج بعد النقطة $O$ عن المستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(Q)$ و $(P)$ .

5) لتكن $H$ منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$

عين مجموعة النقط $M$ حيث : $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MJ}\| = 2\sqrt{2}\|\overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{MI}\|$.

**التمرين الثالث (5 نقاط):**

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_\theta) : z^2 + 4z\cos\theta + 4 = 0$ حيث $\theta \in ]0 , \pi[$.

1) أثبت أنه إذا كان $\alpha$ حل للمعادلة $(E_\theta)$ فإن $\overline{\phantom{\alpha}}$ هو كذلك حلا لها .

2) نضع: $z_1 = -2\cos\theta + 2i\sin\theta$ و $z_2 = -2\cos\theta - 2i\sin\theta$.

أ- تحقق أن $z_1, z_2$ هما حلين للمعادلة $(E_\theta)$ .

ب- أكتب $z_1, z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي .

جـ - استنتج قيمة $\theta$ التي من أجلها يكون $O_1M_2$ مثلثا قائما في $O$ حيث $M_1$ و $M_2$ نقطتان من المستوي لواحقهما $z_1$ و $z_2$ على الترتيب .

3) عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ لما $\theta$ تمسح $\mathbb{R}$ حيث $z = 2e^{i\theta} + 3$

4) نعتبر $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ والنقط $A, B, C$ لواحقها على الترتيب $z_1, z_2, 2$ .

أ- تحقق أن $\frac{z-2}{z_1-2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$.

بـ - عين مركز و نصف قطر الدائرة $(\Gamma_1)$ المحيطة بالمثلث $ABC$ .

5) نعتبر التحويل النقطي $S_1$ في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = iz + 3$.

أ- عين طبيعة التحويل $S_1$ و عناصره المميزة .

بـ - عين $(\Gamma')$ صورة الدائرة $(\Gamma_1)$ بالتحويل $S_1$ , ماذا تستنتج؟ .

**التمرين الرابع ( 7 نقاط ) :**

**الجزء الأول :**

لتكن الدالة $g$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases} g(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} , & x \in \mathbb{R}^* \\ g(0) = 0 \end{cases}$.

و ليكن $(C_g)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) بين أن الدالة $g$ زوجية .

2) أدرس إستمرارية و قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند 0 مُفسراَ قابلية الاشتقاق هندسيا .

3) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

**الجزء الثاني :**

لتكن الدالة $h$ المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x$ بـ : $h(x) = x^2 - 1$ و ليكن $(C_h)$ تمثيلها البيانيفينفس المعلم .

1) بين أن : $\lim_{x \to +\infty} [g(x) - h(x)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $t$ فإن $e^t \geq t + 1$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(C_g)$ و $(C_h)$ .

3) أرسم $(C_g)$ و $(C_h)$ .

4) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نعتبر $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـــ : $u_n = \int_{e^{e^{2n}}}^{e^{e^{4n+4}}} g\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}\right) dx$

أ ــأعط تفسير هندسي للعدد $_0$ ثم أكتب $u_n$ بدلالة $n$

بـ - أحسب المجموع $_n$ بدلالة $n$ حيث $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

انتهى الموضوع الأول

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول( 4 نقاط ) :

لتكن $(u_n)$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$

1) أحسب $u_2$ , $u_1$ , $_3$ ثم عين $q$ أساس المتتالية $(u_n)$ .

2) عبر عن الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ .

3) أحسب بدلالة $n$ كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ والجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ .

4) أ – أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $7^n$ على العدد 5 .

ب - بين أن العدد $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017$ يقبل القسمة على 5 .

جـ - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $S_n{}' = \frac{1}{ln2}[ln4 + ln4^2 + \cdots + ln4^n]$ .

أحسب $_n{}'$ بدلالة $n$ ثم عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$

## التمرين الثاني (4 نقاط ) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(-2, -1, 3)$, $B(1, 3, 5)$ $D(2, -2, -3)$, $C\left(2, -\frac{1}{2}, -4\right)$, و $E(1, -1, 2)$

و المستقيم$(\Delta)$المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $t \in ]0, +\infty[$ $\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ y = -ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z = -1 + \ln(e^2 t) \end{cases}$

1) أ- بين أن النقط $A$ , $B$ ,$C$تعين مستويا $(ABC)$ .

ب - تحقق أن الشعاع$\vec{n}(2, -2, 1)$ناظمي للمستوي$(ABC)$ ثم عين معادلة ديكارتية له .

2) أ- أوجد $\overrightarrow{\ \ }$ أحد أشعة توجيه المستقيم$(\Delta)$.

ب - أوجد$E^2$بدلالة $t$ حيث $M(x, y, z)$نقطة من المستقيم$(\Delta)$ .

جـ - أوجد أصغر قيمة $E^2$ثم استنتج المسافة بين النقطة $E$والمستقيم$(\Delta)$ .

د- استنتج إحداثيات $H$المسقط العمودي للنقطة$E$على المستقيم $(\Delta)$ .

3) أكتب معادلة سطح الكرة ( ) التي مركزها $E$و يمس المستقيم $(\Delta)$ .

4) أ- بين أن المثلث$ABC$قائم في$A$و أحسب مساحته .

ب - أحسب حجم رباعي الوجوه$ABCD$ .

## التمرين الثالث (5 نقاط):

$p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب zحيث: $p(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + (9 + 4i)z - 2 - 9i$ .

1) أ- بين أن المعادلة $p(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $_0$ يطلب تعيينه .

ب - عين العددين المركبين $a$ و $b$بحيث: $p(z) = (z - z_0)(z - 2 + i)(az + b)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(z) = 0$ .

3) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(,\vec{u},\vec{v})$ . ولتكن $B,AC$ نقط من المستوي لواحقها $i4+i$, $2-i$ , على الترتيب .

أ- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا .

بـ - ما طبيعة المثلث $ABC$؟.

4) أ - جد إحداثيي النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ .

بـ - استنتج طبيعة الرباعي $ACBD$ .

5) أ- عين زاوية ونسبة التشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ ويحول النقطة $B$ إلى النقطة $C$ .

بـ - تعرف على طبيعة التحويل $f$ بحيث $f = SoR$. ثم عين عناصره المميزة .

جـ - عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون التحويل $L$ حيث $L = \underbrace{fofo\ldots\ldots o}_{n \text{ مرة}}$ تحاكيا يطلب تعيين عناصره المميزة .

## التمرين الرابع ( 7 نقاط ) :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x(lnx)^2, & x \in ]0, +\infty[ \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(,\vec{i},\vec{j})$.

خذ الوحدة : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5cm$.

1) أ- أثبت أن الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}^+$.(مساعدة لإثبات استمرارية $f$ عند $x = 0$ ضع: $(x = t^2$ و $(t > 0))$ .

بـ - أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

2) - أدرس قابلية اشتقاق $f$ من اليمين عند 0 ثم أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .

3) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ .

4) أ- أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة التي فاصلتها $e$ .

بـ - أرسم $(T)$ و $(C_f)$ في نفس المعلم .

5) $m$ وسيط حقيقي , ناقش بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة: $x(lnx)^2 - 3x + m = 0$ .

6) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 lnx(lnx - 1)$ .

أحسب $g'(x)$ ثم استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0\ ;\ +\infty[$ .

7) $\beta$ عدد حقيقي حيث $0 < \beta < 1$ أحسب المساحة $A(\beta)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$.

وبالمستقيمات التي معادلاتها : $x = \beta$ و $x = 1$ و $y = 0$. ثم أحسب $\lim_{\beta\to0} A(\beta)$

انتهى الموضوع الثاني

# حل نموذجي لامتحان البكالوريا التجريبية شعبة الرياضيات دورة ماي 2017

## الموضوع الأول

| التمارين | عناصر الإجابة | التنقيط مجزأة | التنقيط كاملة |
|---|---|---|---|
| التمرين الأول: | 1) أ- حساب $PGCD(2020\ ;\ 2424)$ .<br>لدينا: $2424 = 2020 \times 1 + 404$ و $2020 = 404 \times 5 + 0$ .<br>ونعلم أن $PGCD$ لعددين في عملية القسمات المنجرة عن خوارزمية اقليدس هو أخر باقي غير معدوم لذلك : $PGCD(2020\,;2424) = 404$ . | 0,25 | 4 |
| | ب - استنتاج أن المعادلة $(1)$ تقبل حلولا :<br>لدينا $PGC(2020\,;2424) = 404$ يقسم $1212$ وبالتالي المعادلة $(1)$ تقبل حلولا . | 0,25 | |
| | جـ - إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x\ ;\ y)$ حل للمعادلة $(1)$ فإن $x$ مضاعف للعدد 3 .<br>لدينا: $2020x - 2424y = 1212 \dots\dots(1)$ تكافئ $5x - 6y = 3$<br>تكافئ $5x = 3(y+2)$ وبما أن العددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما<br>يكون حسب نظرية غوص العدد $x$ مضاعف لـ 3 . | 0,50 | |
| | 2) استنتاج حلا خاصا للمعادلة $(1)$ ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(1)$.<br>لدينا : $5(-1) - 6(-1) = 1$ وبالضرب في العدد 3 نجد $5(-3) - 6(-3) = 3$<br>ومنه $(-3\ ;\ -3)$ حل خاص للمعادلة $(1)$ .<br>ومما سبق نجد حل المعادلة $(1)$ في $\mathbb{Z}^2$ $\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 5(-3) - 6(-3) = 3 \end{cases}$ وبالطرح نجد<br>$5(x+3) = 6(y+3)$ وبما أن العددان 5 و 6 أوليان فيما بينهما يكون حسب نظرية غوص $(x+3)$ مضاعف لـ 6 أي أن $x + 3 = 6k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ومنه $x = 6k - 3$<br>وبالتعويض عن قيمة $x$ في المعادلة $(1)$ نجد $y = 5k - 3$ ومنه مجموعة حلول المعادلة $(1)$ هي: المجموعة $S$ حيث $S = \{(6k-3\,;5k-3) : k \in \mathbb{Z}\}$ . | 1,25 | |
| | 3) استنتج حلول الجملة $(S)$ : $\begin{cases} \lambda \equiv -1[6] \\ \lambda \equiv -4[5] \end{cases}$.<br>حلول الجملة $(S)$: $\begin{cases} \lambda \equiv -1[6] \\ \lambda \equiv -4[5] \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \lambda = -1 + 6m \\ \lambda \equiv -4 + 5n \end{cases}$ و منه $-4 + 5n = -1 + 6m$ أي<br>$5n - 6m = 3$ مما سبق نجد $k \in Z$ : $\begin{cases} n = -3 + 6k \\ m = -3 + 5k \end{cases}$ و منه $k \in Z$ : $\lambda = 30k - 19$ . | 0,50 | |
| | 4) تعين $\alpha$ و $\beta$ حتى تكون الثنائية $(a\ ;\ b)$ حلا للمعادلة $(1)$:<br>$a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث $a = \overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الاساس 5.<br>تعيين قيم $\alpha$ و $\beta$ حتى تكون الثنائية $(a\ ;\ b)$ حلا للمعادلة $(1)$ مع<br>$a = \overline{1\alpha0\alpha00}$ يكافئ $a = 3^5 + 3^4\alpha + 3^2\alpha = 243 + 90\alpha$ و $0 \le \alpha < 3$<br>$b = \overline{\alpha\beta0\alpha}$ و يكافئ $b = 5^3\alpha + 5^2\beta + \alpha = 126\alpha + 25\beta$ و $0 \le \beta < 5$<br>وحتى تكون الثنائية $(a\ ;\ b)$ حلا للمعادلة $(1)$ يجب أن تحقق $5a - 6b = 3$ وبالتعويض عن قيمتي $a$ و $b$ في المعادلة $5a - 6b = 3$ نجد :<br>$5(243 + 90\alpha) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$ يكافئ $-306\alpha - 150\beta = -1212$<br>يكافئ $51\alpha + 25\beta = 202$ | 1 | |

التمرين الثاني : (4)

إذن : لما $\alpha = 0$ نجد $\beta = \frac{202}{25}$ مرفوض و لما $\alpha = 1$ نجد $\beta = \frac{151}{25}$ مرفوض

و لما $\alpha = 2$ نجد $\beta = \frac{100}{25} = 4$ مقبول ومنه قيم $\alpha$ و $\beta$ هي $\alpha = 3$ و $\beta = 4$.

كتابة العددين $a$ و $b$ في النظام العشري لدينا $a = 423$ و $b = 352$ **0.25**

1) أ- بين أن المستقيم $(AB)$ ليس عموديا على المستوي $(P)$ .

لدينا النقطتين $A(-\sqrt{2}, 1, 0)$ $B(0, 0, -\sqrt{2})$, والمستوي $(P)$ ذو المعادلة الديكارتية

$x - y - z + \sqrt{3} = 0$

وبالتالي $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$ و $\overrightarrow{n_p}(1, -1, -1)$ نلاحظ أن : $\frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ أي أن

الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{n_p}$ غير مرتبطين خطيا

و هذا يعني أن المستقيم $(AB)$ ليس عموديا على المستوي $(P)$ . **0,50**

ب - التحقق أن الشعاع $\vec{n}(1; 0; 1)$ ناظمي للمستوي $(Q)$ الذي يشمل النقطتين $A$ و $B$ والعمودي على $(P)$ .

لدينا $(Q)$ يشمل النقطتين $A$ و $B$ ولدينا: $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{n_p} = 0$

أي ان الشعاع $\vec{n}(1; 0; 1)$ ناظمي للمستوي $(Q)$ الذي يشمل النقطتين $A$ و $B$ والعمودي على $(P)$ . **0,50**

جـ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ الذي يشمل النقطتين $A$ و $B$ والعمودي على $(P)$ .

بما أن $\vec{n}(1; 0; 1)$ ناظم للمستوي $(Q)$ فإن معادلة المستوي $(Q)$ من الشكل :

$x + z + d = 0$ ولإيجاد قيمة $d$ نعوض باحداثيات أحد النقطتين $A$ أو $B$

وبتعويض احداثيات $B$ : نجد $0 - \sqrt{2} + d = 0$ أي أن $d = \sqrt{2}$

ومنه نتحصل على: $(Q): x + z + \sqrt{2} = 0$ . **0,50**



2) أ- كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها $O$ والمماسة للمستوي $(P)$ والتحقق أن $(Q)$ يمس $(S)$ .

$(S)$ سطح الكرة التي مركزها $O$ والمماسة للمستوي $(P)$ . معناه : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

حيث $r = d(O; (P)) = \left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right| = 1$ ومنه : $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

المستوي $(Q)$ يمس $(S)$ معناه : $d(O, (Q)) = 1$

لذلك لدينا : $d(O, (Q)) = \left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = 1$ . ومنه المستوي $(Q)$ يمس $(S)$ . **0,50**

ب- $I$ و $J$ نقطتي التماس لـ $(S)$ مع المستويين $(P)$ و $(Q)$. لنبين أن $IJ = \sqrt{2}$ .

ط1 : لدينا $(P)$ و $(Q)$ متعامدان إذن $(OI)$ عمودي على $(OJ)$ ومنه المثلث $OIJ$ قائم في $O$

وحسب مبرهنة فيثاغورس : $IJ^2 = OI^2 + OJ^2 = 2$ ومنه $IJ = \sqrt{2}$ . **0,50**

ط2 : ايجاد احداثيات النقطتين $I$ و $J$ .

لدينا: $\overrightarrow{OI} \parallel \overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{OJ} \parallel \overrightarrow{n_Q}$ وعليه تكون $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $J\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ومنه: $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ وبالتالي : $IJ=\sqrt{2}$ . | | |
| | 3) أ-تحديد طبيعية الرباعي OIKJ<br>بما أن المثلث $OIJ$ قائم في $O$ ولدينا $K$ المسقط العمودي للنقطة $I$ على المستوي $(Q)$ إذن<br>$IK=OJ$ اذن الرباعي $OIKJ$ مربع . | 0,50 | |
| | ب - استنتاج بعد النقطة $O$ عن المستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين$(Q)$ و $(P)$ :<br>$d(O,(\Delta))=OK=IJ=\sqrt{2}$ | 0,50 | |
| | 4) عين مجموعة النقط $M$ حيث: $\Vert\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MJ}\Vert=2\sqrt{2}\Vert\overrightarrow{MJ}-\overrightarrow{MI}\Vert$<br>لدينا $H$ مرجح الجملة $\{(I,1),(J,1)\}$ و لدينا $H$ مرجح الجملة $\{(O,1),(K,1)\}$<br>ومنه $\Vert\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MJ}\Vert=2\sqrt{2}\Vert\overrightarrow{MJ}-\overrightarrow{MI}\Vert$ تكافئ<br>$\Vert 4\overrightarrow{MH}\Vert=2\sqrt{2}\Vert\overrightarrow{IJ}\Vert$ ولدينا $IJ=\sqrt{2}$ إذن $MH=1$<br>ومنه مجموعة النقط $M$ هي سطح كرة مركزها $H$ ونصف قطرها $r=1$ . | 0,50 | |
| التمرين الثالث : | 1) إثبات أنه إذا كان $\alpha$ حل للمعادلة $(E_\theta)$فإن $\overline{\alpha}$ هو كذالك حلا لها .<br>إذا كان $\alpha$ حل للمعادلة $(E_\theta)$ فإن $\alpha^2+4\alpha\cos\theta+4=0$ يكافئ$\overline{\alpha^2+4\alpha\cos\theta+4}=0$ أي<br>ان $\overline{\alpha}^2+4\overline{\alpha}\cos\theta+4=0$ و منه $\overline{\alpha}$ هو كذالك حل لهذه المعادلة . | 0,50 | |
| | 2) أ- التحقق أن$z_1$, $z_2$ هما حلين للمعادلة $(E_\theta)$ .<br>نضع : $z_1=-2\cos\theta+2i\sin\theta$ و $z_2=-2\cos\theta-2i\sin\theta$ .<br>- $z_1$ حل المعادلة $(E_\theta)$ يعني<br>$(-2\cos\theta+2i\sin\theta)^2+4(-2\cos\theta+2i\sin\theta)\cos\theta+4=0$<br>أي ان $4(\cos^2\theta-\sin^2\theta-2i\sin\theta.\cos\theta)+4(-2\cos^2\theta+2i\sin\theta.\cos\theta)+4=0$<br>$4(-\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4=0$ بما ان $(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1$ فإن $-4+4=0$<br>بما أن $z_1$ حل المعادلة $(E_\theta)$ فإن $\overline{z_1}$ حل لهذه المعادلة أي $\overline{z_1}=z_2$ حل. | 0,75 | |
| | ب-الكتابة على الشكل<br>الأسي.<br>$z_1=-2\cos\theta+2i\sin\theta=2(-\cos\theta+i\sin\theta)=2(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta))=2e^{i(\pi-\theta)}$<br>و $z_2=-2\cos\theta-2i\sin\theta=2(-\cos\theta-i\sin\theta)=2(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))=2e^{i(\pi+\theta)}$<br>$z_1=2e^{i(\pi-\theta)}$ , $z_2=2e^{i(\theta+\pi)}$ و $\frac{z_1}{z_2}=e^{-2i\theta}$ . | 0,75 | 5 |
| | ج-استنتاج قيمة التي من أجلها يكون $O_1M_2$ مثلث قائم في $O$<br>$OM_1M_2$مثلثاقائما في $O$يعني$(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2})\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$<br>و لدينا $(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2})=\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=-\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=2\theta$ بالمطابقة نجد$2\theta\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ و منه<br>$2\theta=\frac{\pi}{2}+\pi k\ :k\in Z$ إذن $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\ :k\in Z$. | 0,50 | |
| | 3) تعيين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث $z=2e^{i\theta}+3$<br>$(\Gamma)$ هي دائرة مركزها ذو اللاحقة 3 و نصف قطرها 2 . | 0.25 | |
| | 4) أ- تحقق أن $\frac{z_2-2}{z_1-2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$. | | |

| المحور | الإجابة | العلامة | المجموع |
|---|---|---|---|
| | $\frac{z_2-2}{z_1-2}=\frac{-2\cos\theta-2i\sin\theta-2}{-2\cos\theta+2i\sin\theta-2}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}=e^{i\frac{2\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ | 0,50 | |
| | المثلث $ABC$ متقايس الاضلاع . | 0.25 | |
| | بـ - تعيين مركز و نصف قطر الدائرة $(\Gamma_1)$ المحيطة بالمثلث $ABC$ <br> بما أن $\lvert z_2\rvert=\lvert z_1\rvert=2$ <br> فإن النقط $C\,,\,B\,,\,A$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma_1)$ ذات المركز $O$ و نصف القطر 2 | 0,50 | |
| | 5) أ- تعين طبيعة التحويل $S_1$ وعناصره المميزة . <br> بما أن $\lvert i\rvert=1$ فهو دوران زاويته $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة ذاتاللاحقة $z_0=\frac{3}{1-i}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ | 0.50 | |
| | بـ - تعين $(\Gamma')$ صورة الدائرة $(\Gamma_1)$ بالتحويل $S_1$ <br> صورة $(\Gamma_1)$ بالتحويل $S_1$ هي دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة 3 ونصف قطرها 2 . <br> ونستنتج من هذا أن $(\Gamma')=(\Gamma)$ | 0.50 | |
| التمرين الرابع: | الجزء الأول <br> 1) نبين أن الدالة $g$ دالة زوجية <br> بما الدالة $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ وهو مجال متناظربالنسبة للعدد 0 نحسب <br> $g(-x)=(-x)^2e^{-\frac{1}{(-x)^2}}=x^2e^{-\frac{1}{x^2}}=g(x)$ و منه $g$ دالة زوجية | 0,25 | |
| | 2) دراسة إستمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $g$ عند 0 <br> نحسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{-\frac{1}{x^2}}=0$ لأن: $\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=-\infty$ | 0,25 | |
| | دراسة قابلية الاشتقاق الدالة $g$ عند 0 نحسب نهاية النسبة: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}he^{-\frac{1}{h^2}}=0$ | 0,25 | |
| | و منه الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند 0 إذن منحناها البياني يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لحامل محور الفواصل | 0,25 | 7 |
| | 3) دراسة تغيرات الدالة $g$ <br> النهايات : <br> $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-\frac{1}{x^2}}=+\infty$ . $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-\frac{1}{x^2}}=+\infty$ | 0,50 | |
| | المشتقة : $g'(x)=2xe^{-\frac{1}{x^2}}+x^2.\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=2\left[x+\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$ و منه <br> $g'(x)=2\left[\frac{x^2+1}{x}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$ | 0,50 | |

0,50

إشارتها من إشارة $x$ و منه $g$ دالة متزايدة تماما على المجال $[0\,;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty\,;0]$

0,50

تشكيل جدول تغيراتها :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**الجزء الثاني**

1) نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-h(x)]=0$

0,50

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-h(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2e^{-\frac{1}{x^2}}-x^2+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{-\frac{1}{x^2}}+1\right]$

بتغير المتغير و وضع $t=-\dfrac{1}{x^2}$ نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}(t)=0$ بما أن $\lim\limits_{t\to+0}\left[\dfrac{e^t-1}{t}\right]=1$ فإن

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-h(x)]=\lim_{t\to+0}\left[-\left(\frac{e^t-1}{t}\right)+1\right]=0$$

0,25

التفسير هندسي هو أن المنحنيان $(C_g)$ و $(C_h)$ متقاربان بجوار $+\infty$.

2) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $t$ فإن $e^t\geq t+1$

0,75

لدينا بوضع $f(t)=e^t-t-1$ و ندرس اتجاه تغير الدالة $f$ : $f'(t)=e^t-1$ تنعدم عند 0 و موجبة على المجال $[0\,;+\infty[$ و سالبة على المجال $]-\infty\,;0]$ أي أن الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0\,;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty\,;0]$ إذن فهي تقبل قيمة حدية محلية هي $f(0)=0$ و منه من أجل كل عدد حقيقي $t$ فإن $f(x)\geq 0$ أي ان $e^t\geq t+1$ و هو المطلوب

0,50

الوضع النسبي بين $(C_g)$ و $(C_h)$ ندرس إشارة الفرق:

$$[g(x)-h(x)]=x^2e^{-\frac{1}{x^2}}-x^2+1=x^2\left(e^{-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x^2}\right)$$

بوضع $t=-\dfrac{1}{x^2}$ و منه $t$ عدد سالب

نجد $\left[g(x)-h(x)\right]=x^2e^{-\frac{1}{x^2}}-x^2+1=-\frac{1}{t}\left(e^t-1-t\right)$ مما سبق فإن

$\left(e^t-1-t\right)$ عدد موجب و $-\frac{1}{t}$ عدد موجب و منه الفرق موجب إذن $\left(C_g\right)$ يقع

فوق $\left(C_h\right)$ .

3) الرسم $\left(C_g\right)$ و $\left(C_h\right)$ .

0,50

4) أ - التفسير الهندسي للعدد $u_0$.

لدينا $u_0=\int_e^{e^{e^4}} g\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}\right)dx=\int_e^{e^{e^4}}\frac{1}{\ln(x)}e^{-\ln(x)}dx$ و منه

$u_0=\int_e^{e^{e^4}}\frac{1}{x\ln(x)}dx$ و هندسيا هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى الممثل

للدالة $x\longmapsto\frac{1}{x\ln(x)}$ و المستقيمات التي معادلاتها:

$y=0\,,\;x=e\;\;,\;\;x=e^{e^4}$.

0,50

كتابة $u_n$ بدلالة $n$ لدينا:

$$u_n=\int_{e^{e^{2n}}}^{e^{e^{4n+4}}}\frac{1}{x\ln(x)}dx=\left[\ln[\ln(x)]\right]_{e^{e^{2n}}}^{e^{e^{4n+4}}}=\ln\left[\ln\left(e^{e^{4n+4}}\right)\right]$$

$$-\ln\left[\ln\left(e^{e^{2n}}\right)\right]$$

و منه

0,75

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $u_n = 4n + 4 - 2n = 4 + 2n$ و منه $(u_n)$ متتالية حسابية<br><br>ب - حساب المجموع $S_n$ بدلالة $n$<br><br>$S_n = \frac{n+1}{2}[u_0 + u_n] = \frac{n+1}{2}[4+4+2n] = (n+1)(4+n)$ .اي أن<br><br>$S_n = (n+1)(4+n)$ | 0,25 | |

حل نموذجي لامتحان البكالوريا التجريبية شعبة الرياضيات دورة ماي 2017

## الموضوع الثاني

| التمارين | عناصر الإجابة | التنقيط مجزأة | التنقيط كاملة |
|---|---|---|---|
| التمرين الأول : | | | 4 |

لدينا $(u_n)$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$$

1) حساب $u_3$ ، $u_1$ ، $u_2$ :

لدينا: ${u_2}^2 = u_1 \times u_3$ لأن $u_2$ هو الوسط الهندسي للحدين $u_1$ و$u_3$ .

ومنه : ${u_2}^2 = 256$ يكافئ $u_2 = 16$ أو $u_2 = -16$

وبالتالي $u_2 = 16$ لأن ( حدود المتتالية موجبة) . **(0.25)**

وبالتالي : $\begin{cases} u_1 + 32 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1 + u_3 = 68 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$

إذن $u_1$ و$u_3$ هما حلي المعادلة $x^2 - 68x + 256 = 0$ . **(0.5)**

حساب المميز $\Delta = (-68)^2 - 4 \times 1 \times 256 = 3600$ .

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1 = \frac{68-60}{2} = 4$ أو $x_1 = \frac{68+60}{2} = 64$

وبما أن المتتالية متزايدة فإن: $u_1 = 4$ و $u_3 = 64$ . **(0.25)**

حساب الأساس :

$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{16}{4} = 4$ : **(0.25)**

2) التعبير عن الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ :

لدينا : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$ أي $u_n = 4^n$ .

3) حساب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة $n$: لدينا:

$$S_n = u_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 4 \times \left(\frac{1-4^n}{1-4}\right) = -\frac{4}{3}(1-4^n) = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$$

أي : $S_n = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{4}{3}$ . **(0.50)**

حساب الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ بدلالة $n$ :

لدينا :

$$P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = 4 \times 4^2 \times \dots \times 4^n = 4^{1+2+\dots+n}$$

أي : $P_n = 4^{\frac{n}{2}(1+n)}$ . **(0.50)**

4) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $7^n$ على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n:

لدينا : $7^0 \equiv 1[5]$ $7^1 \equiv 2[5]$ $7^2 \equiv 4[5]$ $7^3 \equiv 3[5]$ $7^4 \equiv 1[5]$

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد $7^n$ على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P = 4$

من أجل كل عدد طبيعي $k$ لدينا :

| $n$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|---|
| بواقي قسمة العدد $7^n$ على 5 | 1 | 2 | 4 | 3 |

**(0.50)**

ب- تبيين أن العدد $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017$ يقبل القسمة على 5 :

**0.50**

لدينا: $2016\equiv 1[5]$ ومنه $2016^{2017}\equiv 1^{2017}[5]$ أي $2016^{2017}\equiv 1[5]$

و $49^{2n}\equiv (7^2)^{2n}[5]$ ومنه $49^{2n}\equiv (7)^{4n}[5]$ أي $49^{2n}\equiv 1[5]$

وكذلك لدينا: $5n-2017\equiv -2[5]$ أي $5n-2017\equiv 3[5]$

وبالتالي: $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017\equiv (1+1+3)[5]$

أي $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017\equiv 5[5]$ لكن $5\equiv 0[5]$

إذن : $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017\equiv 0[5]$

ومنه العدد $2016^{2017}+49^{2n}+5n-2017$ يقبل القسمة على 5 .

جـ - حساب $S_n'$ بدلالة n:

**0.50**

$$S_n'=\frac{1}{ln2}[ln4+ln4^2+\cdots+ln4^n]=\frac{1}{ln2}ln(4\times 4^2\times\ldots\times 4^n)$$

أي $S_n'=\frac{1}{ln2}lnP_n=\frac{1}{ln2}\times ln4^{\frac{n}{2}(1+n)}$

ومنه $S_n'=\frac{1}{ln2}\times(n^2+n)\times ln2$ وبالتالي $S_n'=(n^2+n)$ .

تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$:

**0.25**

$S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ يعني $n^2+n+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$

ومنه: $5n^2+n+1\equiv 0[5]$ أي $n\equiv -1[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$

وبالتالي: $n=5\alpha+4\ ,\ (\alpha\in\mathbb{N})$.

**التمرين الثاني:** (4)

1) أ- إثبات أن النقط $A\ ;\ B\ ;C$ تعين مستويا $(ABC)$

**0,25**

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;4;2)$; $\overrightarrow{AC}\left(4;\frac{1}{2};-7\right)$ بما أن $\frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)}\neq\frac{3}{4}$ فإن النقط $A\ ;\ B\ ;C$ تعين مستويا

ب-التحقق أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$

**0,25**

نحسب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=6-8+2=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=8-1-7=0$ إذن محققة

**0,25**

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي $2x-2y+z-1=0$

2) أ- إيجاد $\vec{u}$ أحد أشعة توجيه المستقيم $(\Delta)$

**0,50**

تمثيله الوسيطي هو $t\in]0;+\infty[$ : $\begin{cases}x=1-\ln(t)\\ y=-\ln\left(\frac{e}{t}\right)\\ z=-1+\ln(e^2t)\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=1-\ln(t)\\ y=-1+\ln(t):t\in]0;+\infty[\\ z=1+\ln(t)\end{cases}$ بوضع

$k=\ln(t)$ نجد $\begin{cases}x=1-k\\ y=-1+k:k\in R\\ z=1+k\end{cases}$ و منه $\vec{u}(-1;1;1)$

ب- لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$ إيجاد $EM^2$ بدلالة $t$ — 0,50

$$EM^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$$

ومنه $EM^2=(-\ln(t))^2+(\ln(t))^2+(\ln(t)-1)^2=3[\ln(t)]^2-2\ln(t)+1$

جـ - إيجاد أصغر قيمة $EM^2$ — 0,75

نضع $EM^2=f(t)$ و ندرس اتجاه تغير الدالة $f$ نجد أن $f'(t)=\dfrac{2(3\ln(t)-1)}{t}$

$f'(t)$ تنعدم عند $t=e^{\frac{1}{3}}$ ; سالبة على المجال $\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ و منه $f$ متناقصة على المجال

$\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ و متزايدة على المجال $\left]e^{\frac{1}{3}};+\infty\right[$ إذن أصغر قيمة تصلها $EM^2$ عندما $t=e^{\frac{1}{3}}$ أي

$EM^2=\dfrac{2}{3}$ و منه المسافة بين النقطة $E$ و المستقيم $(\Delta)$ هي $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ .

د- استنتاج إحداثيات $H$ المسقط العمودي للنقطة $E$ على المستقيم $(\Delta)$

نعوض في التمثيل الوسيطي $t=e^{\frac{1}{3}}$ نجد $H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ — 0,25

3) كتابة معادلة سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $E$ و يمس المستقيم $(\Delta)$

$(S)$ هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث — 0,25

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\dfrac{2}{3}$ يكافئ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+\dfrac{16}{3}=0$

4) أ- نبين أن المثلث $ABC$ قائم في $A$ — 0,25

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=12+2-14=0$ ومنه محققة

حساب مساحة

المثلث $ABC$ — 0,25

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{\sqrt{9+16+4}\times\sqrt{16+\frac{1}{4}+49}}{2}=\frac{29\times3}{4}=\frac{87}{4}$$

ب-حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

نحسب $\dfrac{4}{3}=\dfrac{|2(2)-2(-2)+(-3)-1|}{3}=d((ABC);D)$ — 0.25

و منه الحجم هو: $v_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.d((ABC);D)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{87}{4}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{87}{9}$ — 0,25

**لتمرين الثالث:**

1) أ –نبين ان المعادلة $p(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$

لدينا $p$ كثير حدود للمتغير المركب $z$ حيث

$$p(\lambda i)=(\lambda i)^3-(6+i)(\lambda i)^2+(9+4i)(\lambda i)-2-9i=0$$

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 0.50 | $\begin{cases}6\lambda^2-4\lambda-2=0\\-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9=0\end{cases}$ ي $\begin{cases}(\lambda=1) \text{ و } \left(\lambda=-\frac{1}{3}\right)\\-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9=0\end{cases}$ وعليه $z_0=i$ |
| | 0.50 | ب - تعيين العددين المركبين $a$ و $b$ بحيث $p(z)=(z-z_0)(z-2+i)(az+b)$<br>لايجاد $a$ و $b$ نكتب<br>$\begin{cases}p(z)=z^3-(6+i)z^2+(9+4i)z-2-9i\\p(z)=(z-i)(z-2+i)(az+b)\end{cases}$<br>بالمطابقة نجد $b=-4-i, a=1$ ومنه نجد من اجل كل عدد مركب $z$ :<br>$p(z)=(z-i)(z-2+i)(z-4-i)$ |
| | 0.50 | 2) حل في مجموعه الاعداد المركبة المعادلة $p(z)=0$<br>$p(z)=0$ يعني $z=i$ أو $z=2-i$ أو $z=4+i$ |
| | 0.50 | 3) أ - تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا:<br>لدينا $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)^n=\left(\frac{4+i-i}{2-i-i}\right)^n=\left(\frac{4}{2-2i}\right)^n=\left(\frac{2}{1-i}\right)^n=(1+i)^n$<br>أي $\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{n\frac{\pi}{4}i}$ حقيقيا معناه $n\frac{\pi}{4}=k\pi$ أي $n=4k$ مع $k\in\mathbb{N}$ . |
| | 0.50 | ب ـ طبيعة المثلث $ABC$: المثلث $ABC$ قائم في $B$ ومتساوي الساقين<br>لأن $AC=\sqrt{2}AB$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$ |
| | 0.50 | 4) أ- تعيين احداثيي النقطة $D$ صورة $B$ بالدوران $R$ الذي مركزه $A$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$<br>$R(B)=D$ أي أن $Z_D-Z_A=e^{-\frac{\pi}{2}i}(Z_B-Z_A)$ أي $Z_D=-2-i$ |
| | 0.50 | ب -استنتاج طبيعة الرباعي $ACBD$<br>بما أن $D$ صورة $B$ بالدوران $R$ الذي مركزه $A$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$<br>ولدينا $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}$ فإن الرباعي $ACBD$ متوازي أضلاع . |
| | 0,50 | 5) أ- تعيين زاوية التشابه المباشر $S$: $S(M)=M'\to Z'=aZ+b$<br>أي $S(B)=C$ أي $Z_C=aZ_B+b$ و $S(A)=A$ أي $Z_A=aZ_A+b$<br>$Z_C-Z_A=a(Z_B-Z_A)$ ومنه $a=1+i$<br>ومنه $a=1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$<br>ادن نجد $Z_C-Z_A=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}(Z_B-Z_A)$ ومنه نسبة التشابه هي $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ |
| | 0,50 | ب -طبيعه التحويل النقطي $f=SoR$: $f$ هو تشابه مباشر مركزه $A$<br>ونسبته $k=\sqrt{2}$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ومنه $f=S'\left(A,\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ |
| | 0.50 | جـ - تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون التحويل $L$ حيث $L=\underbrace{fofo\ldots o}_{n \text{ مرة}}$<br>تحاكيا يطلب تعيين عناصره المميزة .<br>$L=S''\left(A,\left(\sqrt{2}\right)^n,-\frac{\pi n}{4}\right)$ و هذا يعني أن $L$ تحاكيا أي $-\frac{\pi n}{4}=p\pi$ ومنه<br>$n=-4p$ مع $p$ عدد صحيح سالب ومنه عناصر التحاكي $L$ هي المركز $A$ ونسبته |

**لتمرين الرابع :**

$k=\left(\sqrt{2}\right)^{-4p}=4^{(-p)}$ مع $p$ عدد صحيح سالب .

1) أ - إثبات أن $f$ مستمرة على $\mathbb{R}^{+}$

لإثبات أن $f$ مستمرة عند الــ $0$ نضع $x=t^{2}$

الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}_{*}^{+}$ لأن الدالة $x\to \ln x$ مستمرة على $\mathbb{R}_{*}^{+}$ ومنه يكفي إثبات $f$ مستمرة عند الــ $0$ من اليمين .

0,50

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} x(\ln x)^{2}=\lim_{x\xrightarrow{>}0} t^{2}\left(\ln t^{2}\right)^{2}=4\lim_{x\xrightarrow{>}0}(t\ln t)^{2}$$
$$=0=f(0)$$

ومنه $f$ أن مستمرة عند الــ $0$ من اليمين

بـ - حساب النهايات :

0,25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

0,25

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x)^{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{2}=+\infty$$

2) قابلية اشتقاق $f$ عند الــ $0$ من اليمين

0,50

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x(\ln x)^{2}}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}(\ln x)^{2}=+\infty$$

ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $0$ من اليمين و المنحنى $(C_f)$ يقبل نصف مماس موازي لحامل محور التراتيب عند المبدأ

3) دراسة اتجاه تغير $f$ على $\mathbb{R}_{*}^{+}$:

0,75

$$f'(x)=(\ln x)^{2}+2x\frac{1}{x}\ln x=(2+\ln x)\ln x$$

$f'(x)=0$ معناه $\ln x+2=0$ أو $\ln x=0$ وبالتالي $x=e^{-2}$ أو $x=1$

$f'(x)>0$ معناه $x\in\,]0\ ,e^{-2}[\,\cup\,]1\ ,+\infty[$ و منه الدالة $f$ متزايدة تماما

$f'(x)<0$ معناه $e^{-2}<x<1$ و منه الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $[e^{-2},\ 1]$

جدول التغيرات

0,50

| $x$ | | $e^{-2}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | - | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

4) أ - معادلة المماس $(T)$ للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة $e$:

0.25

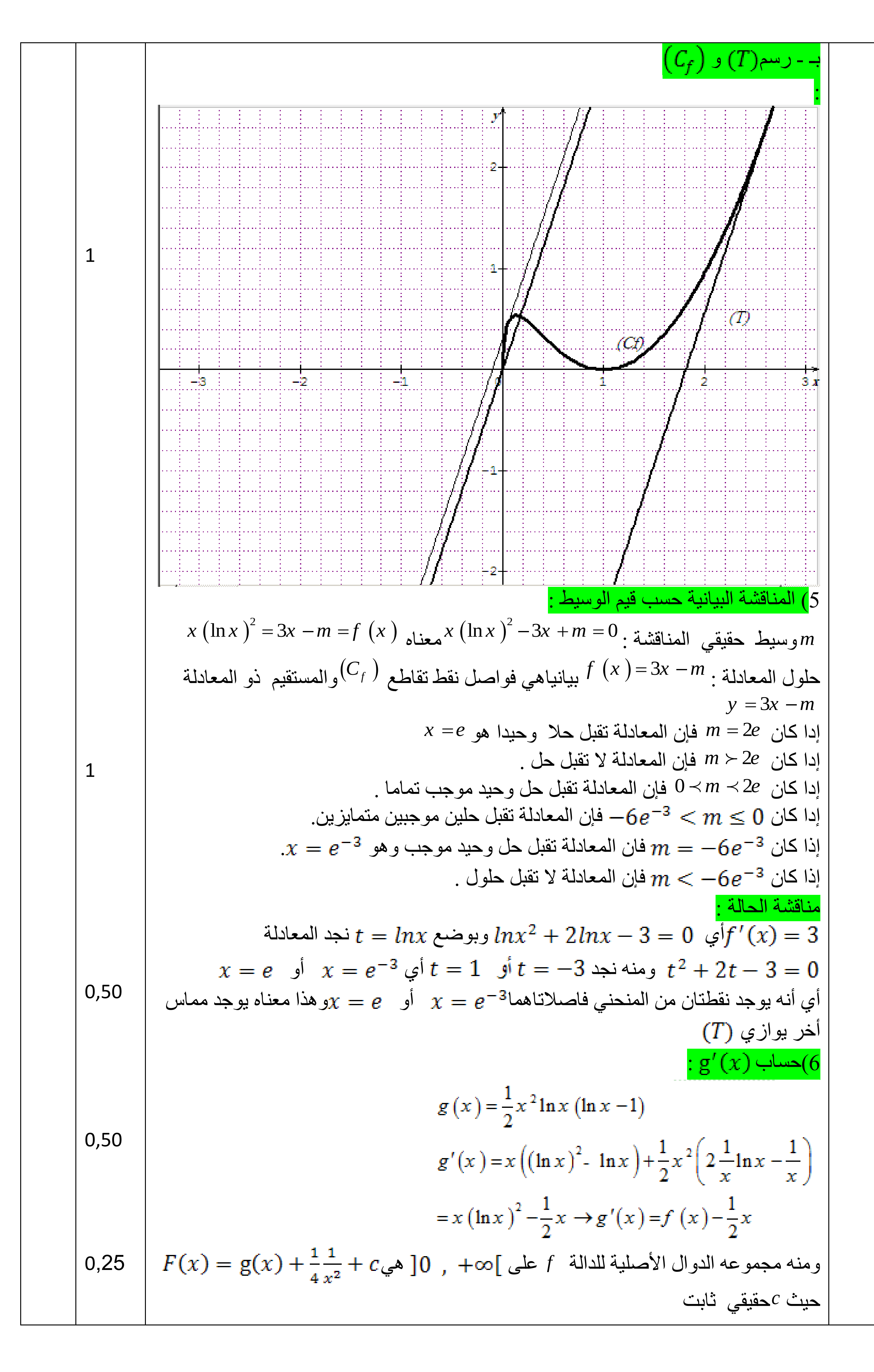
$$\begin{cases} f(e)=e(\ln e)^{2}=e \\ f'(e)=\ln e(\ln e+2)=3 \end{cases}$$

$$y=f'(e)(x-e)+f(e)=3(x-e)+e=3x-2e$$

7

ب - رسم $(T)$ و $(C_f)$ :

1




5) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط :

1

$m$ وسيط حقيقي المناقشة : $x(\ln x)^2-3x+m=0$ معناه $x(\ln x)^2=3x-m=f(x)$

حلول المعادلة : $f(x)=3x-m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ والمستقيم ذو المعادلة $y=3x-m$

إذا كان $m=2e$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $x=e$

إذا كان $m\succ 2e$ فإن المعادلة لا تقبل حل .

إذا كان $0\prec m\prec 2e$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد موجب تماما .

إذا كان $-6e^{-3}<m\le 0$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين متمايزين.

إذا كان $m=-6e^{-3}$ فان المعادلة تقبل حل وحيد موجب وهو $x=e^{-3}$.

إذا كان $m<-6e^{-3}$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

مناقشة الحالة :

0,50

$f'(x)=3$ أي $lnx^2+2lnx-3=0$ وبوضع $t=lnx$ نجد المعادلة

$t^2+2t-3=0$ ومنه نجد $t=-3$ أو $t=1$ أي $x=e^{-3}$ أو $x=e$

أي أنه يوجد نقطتان من المنحني فاصلتاهما $x=e^{-3}$ أو $x=e$ وهذا معناه يوجد مماس أخر يوازي $(T)$

6) حساب $g'(x)$ :

0,50

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x(\ln x-1)$$

$$g'(x)=x\left((\ln x)^2-\ln x\right)+\frac{1}{2}x^2\left(2\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=x(\ln x)^2-\frac{1}{2}x\rightarrow g'(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$$

0,25

ومنه مجموعه الدوال الأصلية للدالة $f$ على $]0\ ,\ +\infty[$ هي $F(x)=g(x)+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+c$

حيث $c$ حقيقي ثابت

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 0.50<br><br><br><br><br>0,25 | 7) حساب المساحة $A(\beta)$<br>$A(\beta)=\left[g(x)+\frac{1}{4}x^2\right]_{\beta}^{1}=\left[\left(g(1)+\frac{1}{4}\right)-\left(g(\beta)+\frac{1}{4}\beta^2\right)\right]$<br>$A(\beta)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\beta^2(ln^2\beta-ln\beta)+\frac{1}{4}\beta^2\right)$<br>$A(\beta)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\beta^2ln^2\beta+\frac{1}{2}\beta^2ln\beta-\frac{1}{4}\beta^2$<br>حساب نهاية $A(\beta)$:<br>$\lim_{\beta\to 0}A(\beta)=\frac{1}{4}$ | |

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**الشعبة : تقني رياضي** **السنة الدراسية : 2017 – 2018**

# موضوع تحضيري في مادة الرياضيات

## التمرين الأول : ( 04 ن )

**1/** نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $2081x-2018y=1......(E)$ و $2081x-2018y=03......(E')$

**أ-** بين أن العددان 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .

**ب –** باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة $(E)$ ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة $(E')$ .

**ج –** حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E')$ .

**2/** نرمز ب $d$ إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين $x$ و $y$ .

**أ –** ماهي القيم الممكنة للعدد $d$ ؟

**ب –** عين حلول المعادلة $(E')$ حتى يكون $d=3$ .

**3/** $A$ و $B$ عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل : $\overline{\alpha\beta0\alpha\alpha}$ ؛ $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}$ .

**أ –** بين أنه إذا كان : $B-A=63$ فإن $19\alpha+6\beta=63......(*)$

**ب –** بين أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة $(*)$ ثم استنتج كتابة العددان $A$ و $B$ في النظام العشري .

## التمرين الثاني : (05 ن)

$P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب $z$ المعرف كما يلي : $P(z)=z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(3-2\sqrt{3}\right)z+6$

**1/ أ –** احسب $p(-2)$ ثم عين العددان $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون : $p(z)=(z+2)\left(z^2+\alpha z+\beta\right).......(*)$

**ب –** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(z)=0$ . ( نرمز ب $z_1$ ؛ $z_2$ إلى حلي المعادلة $(*)$ حيث $\text{Im}(z_1)\succ 0$ ) .

**2/** في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المركب $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط $A$ ؛ $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب

$$z_A=\frac{2}{\sqrt{3}}z_1 \quad ; \quad z_B=\overline{z_A} \quad \text{و} \quad z_C=-2$$

**أ –** اكتب كلا من الأعداد $z_A$ ؛ $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط $A$ ؛ $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(C)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

**ب -** عين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

**ج -** عين ثم انشيء المجموعة $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $\overline{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ . عندما $k$ يمسح $\mathbb{R}$

**3/ أ -** اكتب على الشكل الأسي العدد $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$

ب– استنتج طبيعة التحويل $r$ الذي يحول $B$ إلى $A$ ثم عين عناصره المميزة وكتابته المركبة .

ج - حدد مع التعليل طبيعة المثلث $ABC$ .

د – عين قيم العدد الطبيعي $n'$ حتى يكون العدد $L^{2018n'}$ تخيلي .

ه - عين اللاحقة $z_D$ للنقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

و– استنتج أن النقطتين $B$ و $D$ تنتميان إلى حامل $(\Delta)$ .

**4/** ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه $A$ ونسبته 2 .

أ – عين الكتابة المركبة للتحاكي $h$ .

ب – استنتج صورة لكل من المستقيم $(BD)$ والدائرة $(C)$ بالتحاكي $h$.

ج - عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل $h\circ r$ ( يطلب تعيين الكتابة المركبة ) .

## التمرين الثالث : (04 ن)

يحتوي كيس على عشر كريات بحيث : خمس كريات حمراء تحمل على الترتيب الأرقام 2- ؛ 1- ؛ 0 ؛ 1 ؛ 2 وثلاث كريات خضراء تحمل على الترتيب الأرقام 1- ؛ 0؛ 1 وكرتان سوداوان تحملان على الترتيب الرقمين 1- ؛ 0 .

**1/** نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من هذا الكيس ونفترض أن كل الكريات لها نفس احتمال السحب .

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة ممكنة بالعدد الحقيقي $\ln|x-y|$ حيث $x$ و $y$ هما الرقمان اللذان

تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس .

أ – عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X$ .

ب – اكتب قانون احتمال $X$ ثم احسب أمله الرياضياتي .

**2/** نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الكيس ونسحب منه كريتين دون ارجاع.

أ– احسب عدد الحالات الممكنة للسحب .

ب- احسب $P(A)$ و $P(B)$ ؛ حيث الحدثان $A$ و $B$ معرفان كما يلي :

$A$ : " الكرتان المسحوبتان لوناهما مختلفان "

$B$ : " الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما .

## التمرين الرابع :( 07 ن)

**I )** نعتبر الدالتين $g$ و $h$ المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$

**1 /** أ – احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيرات $g$ على المجال $]0;+\infty[$ .

ب – استنتج أن $g(x)\geq 0$ من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ .

ج – من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ بين أن : $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$

د – استنتج أنه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $h(x)\succ 0$ .

II ) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$

وليكن $(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ . ( وحدة الطول $1cm$ )

1/ أ – احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النهاية الأولى هندسيا . ( لاحظ أن $f(x)=1+x\ln x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ )

ب – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in]0,4;0,5[$ .

2/ أ - بين أن من أجل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f(x)=\frac{h(x)}{x}$

ب – استنتج اتجاه تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ أ – اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ في النقطة التي فاصلتها 1 .

ب – تحقق أن : $f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$ .

ج – استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ .

4/ انشيء المنحنى $(C_f)$ والمماس $(\Delta)$ . ( نقبل أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و $1,5$ )

5/ أ - بين أن الدالة $x\to x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ دالة أصلية للدالة $(\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$ .

ب – باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن الدالة $x\to\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]$ دالة أصلية للدالة $x\to x\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ .

ج – احسب ب $cm^2$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ؛ حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ .

III ) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ ب : $\begin{cases}u_{n+1}=f(u_n)\\ u_0=\sqrt{e}\end{cases}$

1 – برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ : $1\le u_n\le e$

2– ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ . ( يمكن الاستعانة بالسؤال 3 – ج ) .

3 – استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ثم عين نهايتها .

# تصحيح الموضوع التحضيري في مادة الرياضيات

## حل التمرين الأول :

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $2081x-2018y=1......(E)$ و $2081x-2018y=03......(E')$

**أ- تبيان أن العددان 2018 و2081 أوليان فيما بينهما :**

| الحاصل | | 1 | 32 | 31 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| القاسم والمقسوم | 2081 | 2018 | 63 | 2 | 1 |
| الباقي | | 63 | 2 | 1 | 0 |

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات المتتالية يساوي 1 ومنه $p\gcd(2081,2018)=1$ أي العددان 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .

**ب – باستعمال خوارزمية إقليدس تعيين حل خاص للمعادلة $(E)$ ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة $(E')$ :**

لدينا : $\begin{cases}63=2081-2018\\2=2018-63(32)\\1=63-2(31)\end{cases}$ ومنه $1=63-(2018-63(32))(31)$ تكافيء $1=63(993)-2018(31)$ ومنه

$1=(2081-2018)(993)-2018(31)$ ومنه $2081(993)-2018(1024)=1$

ومنه الثنائية $(993;1024)$ حل خاص للمعادلة $(E')$ .

ومنه حل خاص للمعادلة $(E')$ هو : $(993\times3;1024\times3)$ أي الثنائية $(2979;3072)$ حل خاص للمعادلة $(E')$ .

**ج – حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E')$ :**

$\begin{cases}2081x-2018y=3\\2081(2979)-2018(3072)=3\end{cases}$ ومنه $2081(x-2979)=2018(y-3072)....(*)$

$2081/2081(x-2979)$ ومنه $2081/2018(y-3072)$ وبما أن $p\gcd(2081,2018)=1$ فإنه حسب مبرهنة غوص

$2081/(y-3072)$ ومنه يوجد $k\in\mathbb{Z}$ حيث $y-3072=2081k$ وعليه نجد $y=2081k+3072$

وبالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد $x=2018k+2979$ ومنه $S=\{(2018k+2979;2081k+3072)\ /k\in\mathbb{Z}\}$

**2/ أ – القيم الممكنة للعدد $d$ :**

لدينا $\begin{cases}d/x\\d/y\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d/2081x\\d/2018y\end{cases}$ ومنه $d/2081x-2018y$ ومنه $d/3$ ومنه $d\in\{1;3\}$

**ب – تعيين حلول المعادلة $(E')$ حتى يكون $d=3$ :**

لدينا $d=3$ ومنه $\begin{cases} 3 / x \\ 3 / y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x\equiv 0[3] \\ y\equiv 0[3] \end{cases}$ تكافيء $\begin{cases} 2018k+2979\equiv 0[3] \\ 2081k+3072\equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2018k\equiv 0[3] \\ 2081k\equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k\equiv 0[3] \\ k\equiv 0[3] \end{cases}$

ومنه يوجد $k'\in\mathbb{Z}$ حيث : $k=3k'$

ومنه حلول المعادلة $(E')$ بحيث $p\gcd(x;y)=3$ هي : $S=\{(6054k'+2979;6243k'+3072)\ /k'\in\mathbb{Z}\}$

**/3** $A=\overline{\alpha\beta0\alpha\alpha}^{5}$ ؛ $B=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^{5}$ .

**أ – تبيان أنه إذا كان : $B-A=63$ فإن** $19\alpha+6\beta=63......(*)$

لدينا $\begin{cases} A=\overline{\alpha\beta0\alpha\alpha}^{5}=\alpha.5^0+\alpha.5^1+0.5^2+\beta.5^3+\alpha.5^4 \\ B=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^{5}=\beta.5^0+\beta.5^1+\alpha.5^2+\beta.5^3+\alpha.5^4 \end{cases}$ حيث $0\prec\alpha\leq 4$ و $0\leq\beta\leq 4$

ومنه $\begin{cases} A=631\alpha+125\beta \\ B=650\alpha+131\beta \end{cases}$ ومنه $B-A=19\alpha+6\beta$

ومنه إذا كان $B-A=63$ فإن $19\alpha+6\beta=63......(*)$

**ب – تبيان أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة $(*)$ ثم استنتاج كتابة العددان $A$ و $B$ في النظام العشري**

لدينا $\alpha\in\{1;2;3;4\}$ و $\beta\in\{0;2;3;4\}$

| 4 | **3** | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| 76 | 57 | 38 | 19 | 0 |
| 82 | **63** | 44 | 25 | **1** |
| 88 | 69 | 50 | 31 | 2 |
| 94 | 75 | 56 | 37 | 3 |
| 100 | 81 | 62 | 43 | 4 |

ومنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ تحقق المعادلة $(*)$ حيث $(\alpha;\beta)=(3;1)$ .

**●استنتاج كتابة العددان $A$ و $B$ في النظام العشري :**

لدينا $\begin{cases} A=631\alpha+125\beta \\ B=650\alpha+131\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} A=631(3)+125(1) \\ B=650(3)+131(1) \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} A=2018 \\ B=2081 \end{cases}$

## حل التمرين الثاني :

$P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب $z$ المعرف كما يلي : $P(z)=z^3+(2-\sqrt{3})z^2+(3-2\sqrt{3})z+6$

**1/ أ – حساب $p(-2)$ ثم عين العددان $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون :** $p(z)=(z+2)(z^2+\alpha z+\beta).......(*)$

$$P(-2)=(-2)^3+(2-\sqrt{3})(-2)^2+(3-2\sqrt{3})(-2)+6=-8+8-4\sqrt{3}-6+4\sqrt{3}+6=0$$

ومنه العدد $-2$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ومنه $p(z)=(z+2)(z^2+\alpha z+\beta)$

ومنه $p(z)=z^3+\alpha z^2+\beta z+2z^2+2\alpha z+2\beta$ ومنه $p(z)=z^3+(\alpha+2)z^2+(\beta+2\alpha)z+2\beta$

ومنه $\begin{cases}\alpha=-\sqrt{3}\\ \beta=3\end{cases}$ ومنه $p(z)=(z+2)(z^2-\sqrt{3}z+3).......(*)$

**ب – حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :** $p(z)=0$

$p(z)=0$ تكافيء $(z+2)(z^2-\sqrt{3}z+3)=0$ ومنه $\begin{cases}z_0=-2\\ (z^2-\sqrt{3}z+3)=0....(**)\end{cases}$

- **حل المعادلة $(**)$ :**

$\Delta=-9=9i^2$ ومنه $\sqrt{\Delta}=3i$

ومنه : $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ و $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

ومنه $S=\{z_0,z_1,z_2\}$ .

**/2** $z_A=\frac{2}{\sqrt{3}}z_1$ ؛ $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

**أ – كتابة كلا من الأعداد $z_A$ ؛ $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط $A$ ؛ $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائر$(C)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها :**

- $z_A=\frac{2}{\sqrt{3}}z_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

- $z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ • $z_C=-2=2e^{i\pi}$

**- استنتاج أن النقط $A$ ؛ $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(C)$ :**

$|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ تكافيء $|z_A-z_O|=|z_B-z_O|=|z_C-z_O|=2$ معناه : $OA=OB=OC=2$

ومنه النقط $A$ ؛ $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(C)$ ذات المركز $O(0,0)$ ونصف القطر $R=2$ .

**ب - تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي :**

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي معناه $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = k\pi$ تكافيء $n.\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = k\pi$ تكافيء $n.\arg\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right) = k\pi$

تكافيء $n.\arg\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = k\pi$ تكافيء $n.\frac{2\pi}{3} = k\pi$ ومنه $n = \frac{3k}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ .

**ج - تعيين و إنشاء المجموعة $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $\overline{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ . عندما $k$ يمسح $\mathbb{R}$**

لدينا $\overline{z} = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\arg\left(\overline{z}\right) = \arg\left(ke^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$ تكافيء $-\arg(z) = \frac{-2\pi}{3} + 2k'\pi$ ومنه $\arg(z) = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$ تكافيء

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \ / k' \in \mathbb{Z}$ ومنه $(\Delta)$ هو نصف المستقيم $[OM)$ والذي ميله $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ باستثناء النقطة $O$ .

**/3 أ - الشكل الأسي للعدد $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ :**

- $$L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1 + \sqrt{3}i + 2}{1 - \sqrt{3}i + 2} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - i\right)} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

**ب– استنتاج طبيعة التحويل $r$ الذي يحول $B$ إلى $A$ ثم عين عناصره المميزة وكتابته المركبة :**

لدينا $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ تكافيء $z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B - z_C\right)$ وهي من الشكل $z' - z_\Omega = a\left(z - z_\Omega\right)$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$

$|a| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ ومنه $r$ دوران مركزه $C(-2,0)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ .

ومنه من أجل كل نقطة $M(z)$ صورتها $M'(z')$ بالدوران $r$ فإن $z' - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - z_C\right)$

ومنه $(2)$ $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ومنه نجد : $\boxed{r : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 - \sqrt{3}i}$

**ج - تحديد طبيعة المثلث $ABC$ :**

$$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases}$$ تكافيء $$\begin{cases} \frac{AC}{BC} = 1 \\ \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$ ومنه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

**د – تعيين قيم العدد الطبيعي $n'$ حتى يكون العدد $L^{2018n'}$ تخيلي :**

$L^{2018n'}$ تخيلي معناه $\arg\left(L^{2018n'}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \ /k\in\mathbb{Z}$ ومنه $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2018n'}=\frac{\pi}{2}+k\pi \ /k\in\mathbb{Z}$ ومنه

$\arg\left(e^{i2018n'\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \ /k\in\mathbb{Z}$ تكافيء $\arg\left(e^{i\frac{2019\pi-\pi}{3}n'}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \ /k\in\mathbb{Z}$ ومنه $\arg\left(e^{i\frac{2\pi}{3}n'}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \ /k\in\mathbb{Z}$

تكافيء $\frac{2\pi}{3}n'=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه نجد : $\boxed{n'=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}k \quad /k\in\mathbb{Z}}$

**ه - تعيين اللاحقة $z_D$ للنقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :**

$\frac{z_D+z_B}{2}=\frac{z_A+z_C}{2}$ تكافيء $z_D+z_B=z_A+z_C$ تكافيء $z_D=z_A+z_C-z_B$ ومنه $z_D=1+\sqrt{3}i-2-1+\sqrt{3}i$

ومنه $\boxed{z_D=-2+2\sqrt{3}i}$ .

**و– استنتاج أن النقطتين $B$ و $D$ تنتميان إلى حامل $(\Delta)$ :**

لدينا $z_D=-2+2\sqrt{3}i$ ومنه $z_D=2\left(-1+\sqrt{3}i\right)=4\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\arg\left(z_D\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ /k\in\mathbb{Z}$

ومنه $D\in(\Delta)$

ولدينا أيضا $\arg\left(z_D\right)+\pi=\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{5\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\arg\left(z_B\right)$ . ( يمكن الاستنتاج بطرق أخرى )

ومنه $B$ و $D$ تقعان على نفس الحامل .

**4/** $h$ التحاكي الذي مركزه $A$ ونسبته 2 .

**أ – تعيين الكتابة المركبة للتحاكي $h$ :**

من أجل كل نقطة $M(z)$ صورتها $M'(z')$ بالتحاكي $h$ الذي نسبته 2 ومركزه $A$ لدينا :

$\begin{cases} h(M)=M' \\ h(A)=A \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z'=2z+b............(1) \\ z_A=2z_A+b.........(2) \end{cases}$

من العلاقة (2) نجد $b=-2z_A=-2-2\sqrt{3}i$ وبالتعويض في (1) نجد : $\boxed{h:z'=2z-2-2\sqrt{3}i}$

**ب – استنتاج صورة لكل من المستقيم $(BD)$ والدائرة $(C)$ بالتحاكي $h$:**

**• صورة $(BD)$ :**

بما أن التحاكي يحافظ على التوازي وعلى استقامية النقط فإن صورة المستقيم $(BD)$ هو المستقيم $(B'D')$ حيث $B'$ و $D'$ هما صورتي النقطتين $B$ و $D$ على الترتيب بواسطة التحاكي $h$ .

● صورة الدائرة $(C)$ :

صورة الدائرة $(C)$ هي الدائرة $(C')$ التي مركزها $O'\left(-2,-2\sqrt{3}\right)$ صورة $O(0,0)$ بالتحاك $h$ ونصف قطرها $R'=2R$

ج - تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل $h\circ r$ ( يطلب تعيين الكتابة المركبة ) :

التحويل $h\circ r$ هو تشابه مباشر نسبته 2 ( نسبة التحاكي $h$) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ( زاوية الدوران $r$ ) .

- تعيين الكتابة المركبة للتحويل $h\circ r$ :

لدينا

z → r → $z_1$ → h → z'
h0r

$$\begin{cases} r: z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 - \sqrt{3}i \\ h: z' = 2z_1 - 2 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

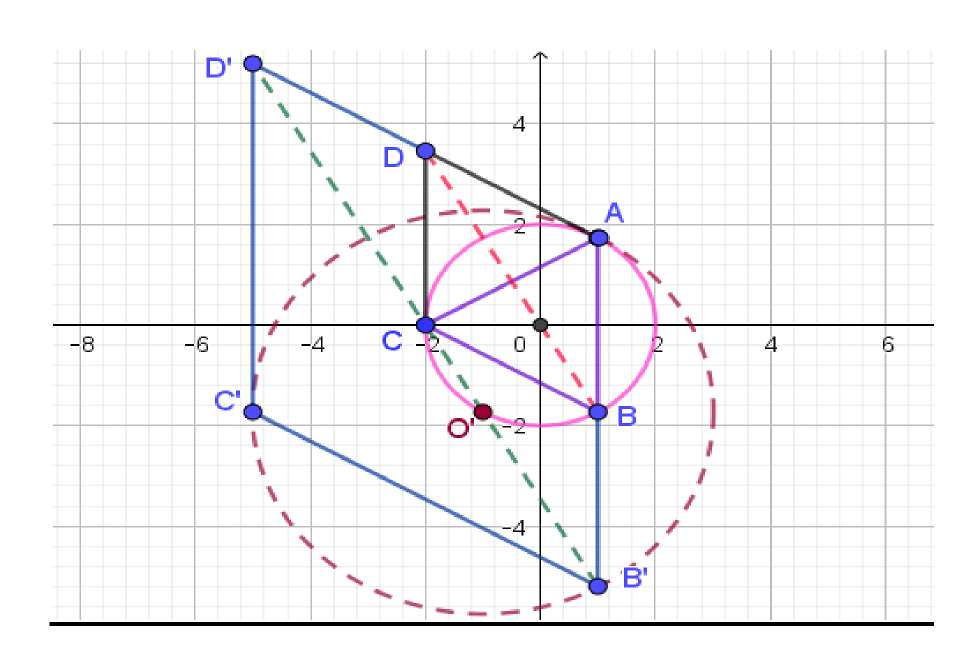
$$(h\circ r)(z) = h(r(z)) = h(z_1) = h\left(e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 - \sqrt{3}i\right)$$

ومنه $h\circ r: z' = 2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 - \sqrt{3}i\right) - 2 - 2\sqrt{3}i$

ومنه نجد : $\boxed{h\circ r: z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z - 4\sqrt{3}i}$

- مركز التشابه $h\circ r$ هو النقطة الصامدة $\Omega$ ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{-4\sqrt{3}i}{1-\left(1+\sqrt{3}i\right)} = 4$

● **الإنشاء :**



**حل التمرين الثالث :**

خمس كريات حمراء تحمل الأرقام 2- ؛ 1- ؛ 0 ؛ 1 ؛ 2 وثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام 1- ؛ 0؛ 1 وكرتان سوداوان تحملان الرقمين 1- ؛ 0 .

**/1** نسحب في آن واحد كريتين

$X$ المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة ممكنة بالعدد الحقيقي $\ln|x-y|$ حيث $x$ و $y$ الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس .

**أ – تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X$ :**

القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X$ هي : $0$ ؛ $\ln 2$ ؛ $\ln 3$ ؛ $\ln 4$

**ب – قانون احتمال $X$ ثم حساب أمله الرياضياتي :**

| $X_i$ | $0$ | $\ln 2$ | $\ln 3$ | $\ln 4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = X_i)$ | $\frac{20}{38}$ | $\frac{12}{38}$ | $\frac{05}{38}$ | $\frac{01}{38}$ |

عدد الحالات الممكنة للسحب هو : 38 ( يمكن الاستعانة بجدول )

● **حساب** $P(X=0)$ :

( سحب كرتان تحملان الرقمين 0 و -1) أو ( سحب كرتان تحملان الرقمين 0 و 1)

أو ( سحب كرتان تحملان الرقمين -1و-2 ) أو ( سحب كرتان تحملان الرقمين 1 و2 )

ومنه $$P(X=0)=\frac{\left(C_3^1\times C_3^1\right)+\left(C_3^1\times C_2^1\right)+\left(C_3^1\times C_1^1\right)+\left(C_2^1\times C_1^1\right)}{38}=\frac{20}{38}$$

● **حساب** $P(X=\ln 2)$ :

( سحب كرة تحمل الرقم 0 وكرة تحمل الرقم 2 ) أو ( سحب كرة تحمل الرقم 0 وكرة تحمل الرقم -2 )

أو ( سحب كرة تحمل الرقم -1 وكرة تحمل الرقم 1)

$$P(X=\ln 2)=\frac{\left(C_3^1\times C_1^1\right)+\left(C_3^1\times C_1^1\right)+\left(C_3^1\times C_2^1\right)}{38}=\frac{12}{38}$$

● **حساب** $P(X=\ln 3)$ :

( سحب كرتان تحملان الرقمين -1 و2) أو ( سحب كرتان تحملان الرقمين 1 و- 2 )

$$P(X=\ln 3)=\frac{\left(C_3^1\times C_1^1\right)+\left(C_2^1\times C_1^1\right)}{38}=\frac{05}{38}$$

● حساب $P(X=\ln 4)$ :

( سحب كرتان تحملان الرقمين 2 و -2)

$$P(X=\ln 4)=\frac{\left(C_1^1\times C_1^1\right)}{38}=\frac{01}{38}$$

● حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}X_i\times P(X=X_i)$$
$$=0\times\left(\frac{20}{38}\right)+\ln 2\times\left(\frac{12}{38}\right)+\ln 3\times\left(\frac{5}{38}\right)+\ln 4\times\left(\frac{01}{38}\right)$$
$$E(X)\approx 13;84$$

**/2** نسحب من الكيس كريتين دون ارجاع.

**أ–عدد الحالات الممكنة للسحب :**

عدد الحالات الممكنة للسحب هو : $A_{10}^2=90$

**ب-** حساب $P(A)$ و $P(B)$ ؛ حيث الحدثان $A$ و $B$ معرفان كما يلي :

$A$ : " الكرتان المسحوبتان لوناهما مختلفان "

( سحب كرة حمراء وكرة خضراء) أو ( كرة حمراء وكرة سوداء ) أو ( كرة خضراء وكرة سوداء )

ومنه: $P(A)=\dfrac{2A_5^1\times A_3^1+2A_5^1\times A_2^1+2A_3^1\times A_2^1}{90}=\dfrac{31}{45}$

$B$ : " الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما

( سحب كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 )

$$P(B)=\frac{2A_2^1\times A_1^1}{90}=\frac{2}{45}$$

## الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية الشهيد عبد الكريم هالي قمار

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبية — دورة : مـاي 2014

**الشعبة** : رياضيات

اختبار في مادة : **الرياضيات** — **المدة** : 4 ساعات ونصف

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول :

**I-** نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ والوسيط الحقيقي $\alpha$ التالية :

$$(E).....z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0$$

**1.** بين أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه .

**2.** عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث المعادلة $(E)$ تكافئ المعادلة $(z-\alpha i)(z^2+az+b)=0$ .

**3.** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$.

**II-** في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ . نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $G$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=\alpha i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}$ و $z_G=5$ .

**1.** بين $z_E$ لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)$.

**2.** عين $z_F$ لاحقة النقطة $F$ صورة النقطة $G$ بالدوران $r$ الذي مركزه $I$ منتصف $[AB]$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

**3.** احسب $z_G-z_A$ و $z_F-z_E$، ثم اكتب العدد $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}$ على شكله الأسي. ماذا تستنتج ؟

**4.** أ) بين أن $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$ .

ب) عين قيمتي $\alpha$ التي تكون من أجلها النقط $A$ ، $E$ و $F$ في استقامية.

جـ) من أجل قيمتي $\alpha$ المتحصل عليهما سابقا بين أن $A$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ التي قطرها $[BC]$.

د) استنتج في هذه الحالة طبيعة المثلث $ABC$ .

### التمرين الثاني :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$.

**1.** بين أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

**2.** تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1:-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ . ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

**3.** أ) عين إحداثيات النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$ .

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يمر بالنقطة $G$ ويعامد المستوي $(ABC)$ .

جـ) نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث $t$ عدد حقيقي . عين العدد $t$ حتى يكون $AS^2=AB^2$ .

د) عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ . ثم احسب حجمه $V$.

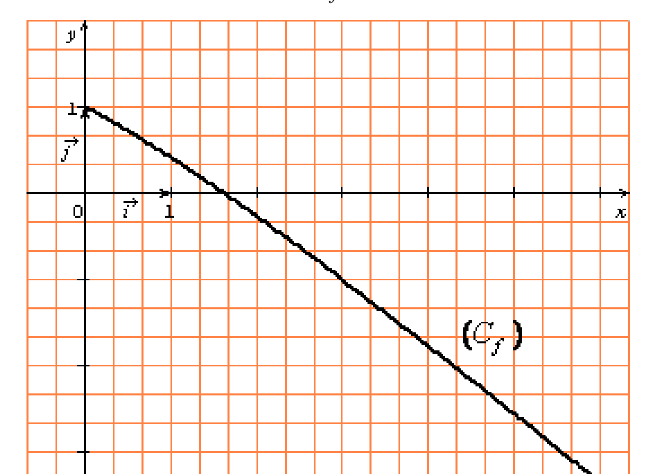
**4.** بين أن المستقيمين $(FA)$ و $(BC)$ متعامدين .

5. أ) عين المجموعة $(S)$ للنقط $M$ التي تحقق ، $\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$ .

ب) عين الوضع النسبي للمجموعة $(S)$ والمستوي $(ABC)$.

**التمرين الثالث :**

1. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\sqrt{x+1}$ و $(C_f)$ منحناها ( انظر الشكل)




أ) بقراءة بيانية عين حصرا بين عددين صحيحين للعدد $\alpha$ بحيث $f(\alpha)=0$ .

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

2. نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$ .

أ) احسب $u_1$ و $u_2$ ثم $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1\le u_n\le\alpha$ .

جـ) عين اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة.

د) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$ ثم احسبها.

**التمرين الرابع :**

$k$ عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة $f_k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=x-1+xe^{kx}$ .

نرمز بـ $(C_k)$ للمنحنى الممثل للدالة $f_k$ في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I- نعتبر الدالة $g_k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x)=1+(1+kx)e^{kx}$ .

1. احسب المشتق $g_k'(x)$ ثم أدرس إشارته.

2. شكل جدول تغيرات الدالة $g_k$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $g_k(x)>0$ .

II- 1. أ) بين جميع المنحنيات $(C_k)$ تمر بنقطة ثابتة $I$ يطلب تعيين إحداثيتيها.

ب) احسب نهاية الدالة $f_k$ عند $-\infty$ و $+\infty$ .

جـ) بين أن المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_k)$ بجوار $-\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة $f_k$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ) عين معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_k)$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) بين أن النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k};-\frac{2}{k}(1+e^{-2})-1\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_k)$.

4. أ) بين أن المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0\le\alpha\le1$.

ب) بين أن المسافة بين النقطة $N(\alpha;f_1(\alpha))$ والمستقيم $(D)$ تساوي $\alpha e^{\alpha}/\sqrt{2}$ .

5. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f_k(x)+f_{-k}(-x)=-2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_k)$ و $(C_{-k})$؟

ب) الشكل المرفق يمثل المنحنى $(C_1)$. أرسم على نفس الشكل المنحنى $(C_{-1})$.

III- $\lambda$ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر التكامل التالي: $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx$ .

1. هل العدد $I_k$ يمثل مساحة ؟ علل.

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب $I_1$ ثم $\lim_{\lambda\to-\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة.

3. بين أن $\lim_{\lambda\to-\infty} I_k=\frac{1}{k^2}$ .

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول :

**I-** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$.

**II-** في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ . نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\overline{\sqrt{5}-2i}$.

**1.** احسب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$ ثم أنشئ النقط $A$، $B$ و $C$.

**2.** بين أن النقطة $C$ هي صورة النقطة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ ونسبته $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

**3.** أ) عين $z_{C'}$ لاحقة النقطة $C'$ نظيرة النقطة $C$ بالنسبة للنقطة $A$.

ب) علما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع بين أن لاحقة النقطة $B'$ هي $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$.

جـ) اكتب العدد $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}$ على شكله الأسي.

د) استنتج أن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$ ، و $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

## التمرين الثاني :

**I-** $a$، $b$ و $c$ أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

عين الأعداد $a$، $b$ و $c$ علما أن في النظام ذي الأساس $a$ يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$.

**II-** نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث $x$ و $y$ عددين صحيحين طبيعيين.

**1.** أ) عين الثنائية $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) .

ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1) .

**2.** أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$، بواقي القسمة الإقليدية للعدد $9^n$ على 13.

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

**3.** أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب) عين $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$.

## التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;-1;2)$، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$ . والمستقيم $(D)$ المعرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$ . مع $k$ عدد حقيقي.

**1.** احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ . استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**2.** أ) عين إحداثيات كل من النقطتين $G$ و $I$ حيث $G$ مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$ و $I$ منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ب) ما طبيعة الرباعي $ABIG$ .

**3.** أ) احسب $AG^2$، $BG^2$ و $CG^2$ .

ب) عين مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$ .

**4.** نعتبر سطح الكرة $(S)$ الذي مركزه $G$ ونصف قطره $3\sqrt{2}$. والمجموعة $(P)$ للنقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{V}=-18$ حيث $\overrightarrow{V}(-6;-6;0)$.

أ) عين معادلة ديكارتية للمجموعة $(P)$.

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يمر بالنقطة $G$ ويعامد $(P)$، ثم استنتج إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $G$ على $(P)$.

جـ) عين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$ .

**5.** بين أن المستويين $(P)$ و $(ABC)$ يتقاطعان في $(D)$ .

## التمرين الرابع :

**I-** باستعمال قابلية الاشتقاق للدالة $x\mapsto \ln x$ عند 1 ، بين أن: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ .

**II-** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1.** أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ ، $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ب) من أجل $x\geq 1$ ، بين أن ، $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=x-1$ .

جـ) بين أن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 1. فسر النتيجة بيانيا.

**2.** أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، ثم شكل جدول تغير الدالة $f$.

جـ) ارسم المنحنى $(C_f)$.

**3.** ليكن $S$ مساحة الحيز $D$ المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$.

$A$ و $B$ نقطتان من $(C_f)$ فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3 ، والنقطتان $P(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوي.

أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث $ABQ$.

ب) استنتج أن ، $2\ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq 4\ln(1+\sqrt{2})$. ( ملاحظة : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ )

**III-** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و $(C_g)$ تمثيلها البياني.

**1.** بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ ، $g(x)\geq 1$.

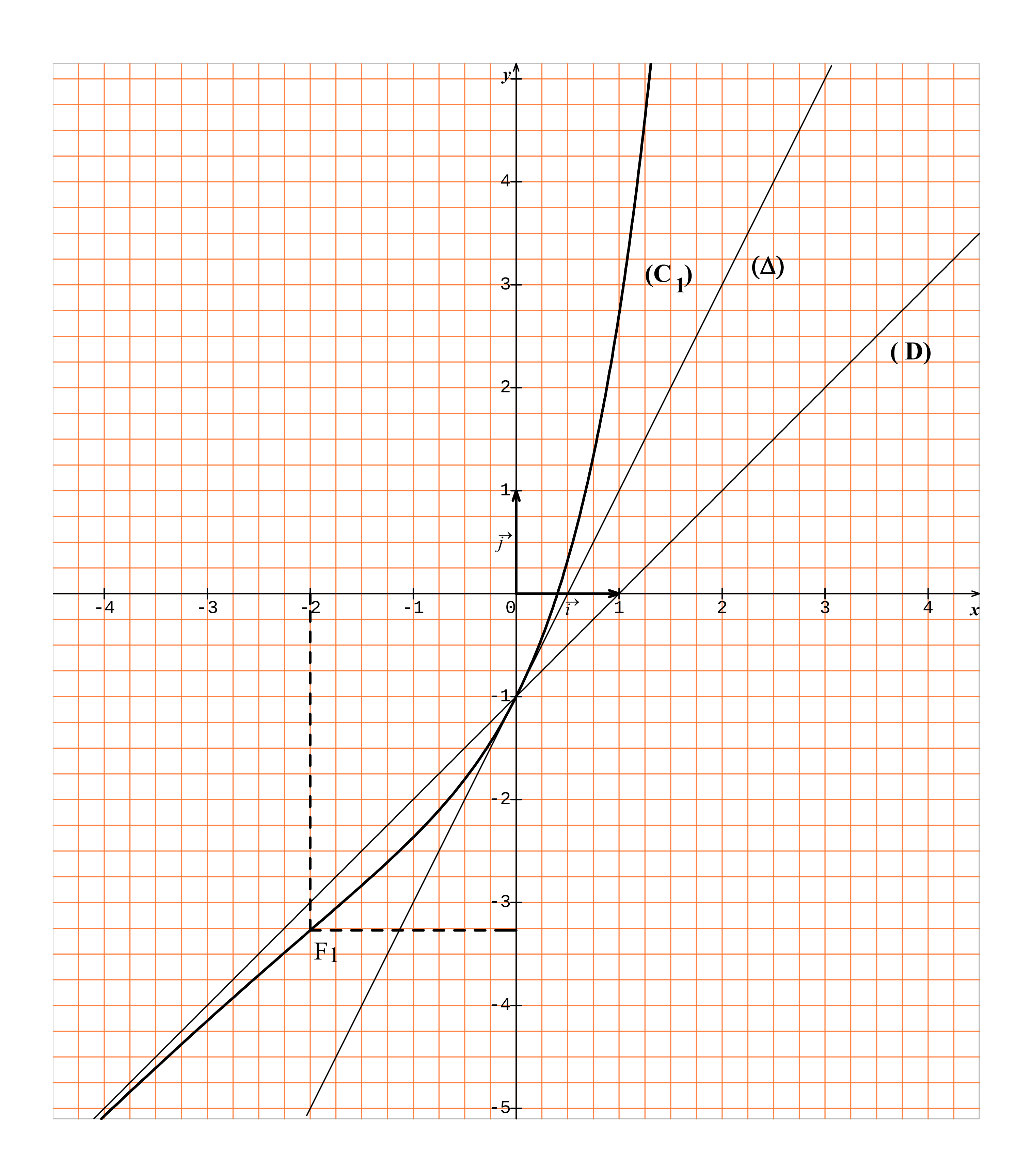
2. أ) بين أن $g\circ f(x)=x$ . ثم بين أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من $(C_f)$ فإن $M'(y;x)$ نقطة من $(C_g)$.

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ ؟ ارسم المنحنى في المعلم السابق $(C_g)$.

**3.** ليكن $S'$ مساحة الحيز $D'$ المحدد بالمنحنى $(C_g)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$ .

أ) بين أن $S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ .

ب) احسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ثم استنتج قيمة $S$ .



y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x
(C 1)
(Δ)
( D)
F1

## الموضوع الأول(1)

### ♣ التمرين الأول :

**I-** $(E)..z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0$

**.1** نضع $z=yi$ مع $y$ عدد حقيقي.
$z=yi$ حل للمعادلة يعني أن :

$$-iy^3+4y^2+\alpha y^2 i+13yi-4\alpha y-13\alpha i=0$$

و هذا يكافئ $\begin{cases}4y^2-4\alpha y=0\\-y^3+\alpha y^2+13y-13\alpha=0\end{cases}$ أي

$\begin{cases}4y(y-\alpha)=0\\y^2(y-\alpha)-13(y-\alpha)=0\end{cases}$ إذن $y=\alpha$

ومنه الحل التخيلي للمعادلة $(E)$ هو $z=i\alpha$ .

**.2** $(E)$ تكافئ $(z-\alpha i)(z^2-4z+13)=0$.
أي $a=-4$ و $b=13$.

**.3** $(E)$ تكافئ $z-\alpha i=0$ أو $z^2-4z+13=0$ .
أي $z=\alpha i$ أو $(z-2)^2=9i^2$ .

ومنه حلول المعادلة $(E)$ هي: $\boxed{2+3i \text{ ، } 2-3i \text{ ، } \alpha i}$.

**II-** لدينا النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $G$ حيث $z_A=\alpha i$ ،
$z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}=2-3i$ و $z_G=5$ .

**.1** $S(B)=E$ يكافئ $z_E-z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B-z_A)$.

أي $z_E=\frac{1}{2}(1+i)(2+3i-\alpha i)+\alpha i$ ومنه

$$z_E=\frac{1}{2}(2+3i-\alpha i+2i-3+\alpha+2\alpha i)$$

إذن: $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)$.

**.2** لدينا $r(G)=F$ و $z_I=1+\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)i$.

ومنه $z_F-z_I=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_G-z_I)$

أي $z_F=-i(5-1-\frac{3+\alpha}{2}i)+1+\frac{3+\alpha}{2}i$

إذن : $z_F=\left(\frac{-1-\alpha}{2}\right)+i\left(\frac{\alpha-5}{2}\right)$.

**.3** حساب $z_G-z_A$ و $z_F-z_E$ .
$z_F-z_E=-\alpha-5i=-i(5-\alpha i)$ و

$$z_G-z_A=5-\alpha i$$

ومنه $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}=\frac{5-\alpha i}{-i(5-\alpha i)}=\frac{1}{-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

**الاستنتاج :**

بما أن $\left|\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$

فإن $\boxed{(EF)\perp(AG) \text{ و } EF=AG}$ .

**.4** أ) لدينا $z_F-z_E=-\alpha-5i$ ونحسب $z_A-z_E$

أي $z_A-z_E=\frac{1}{2}[(-\alpha+1)+i(\alpha-5)]$.

ومنه $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{2(-\alpha-5i)[(1-\alpha)-(\alpha-5)i]}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$

أي $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$.

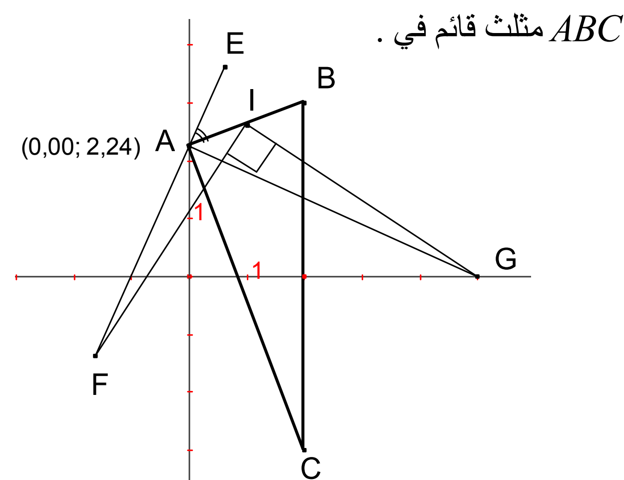
ب) $A$ ، $E$ و $F$ في استقامية يعني أن العدد المركب $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}$ عددا حقيقيا.

ومنه $\begin{cases}2\alpha^2-10=0\\(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2\neq 0\end{cases}$

إذن $\boxed{\alpha=\sqrt{5} \text{ أو } \alpha=-\sqrt{5}}$.

جـ) من أجل $z_A=-i\sqrt{5}$ أو $z_A=i\sqrt{5}$ يمكن التحقق بسهولة أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ وعليه النقطة $A$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ .

د) بما أن $A\in(C)$ فإن $(AB)\perp(AC)$ ومنه $ABC$ مثلث قائم في .



## الموضوع الأول(2)

### ♣ التمرين الثاني:

لدينا النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$

**1.** المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع بالفعل :

$\overrightarrow{AB}(0;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;3;0)$ و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$ .

ومنه $AB=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=AC=BC=3\sqrt{2}$ .

**2.** $\vec{n}(1;1:-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ بالفعل:

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0(1)+3(1)+3(-1)=0$ و

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=-3(1)+3(1)+0(-1)=0$

أي $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ .

إذن : $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني أن $\overrightarrow{CM}.\vec{n}=0$ .

أي $(x-0)+(y-5)-(z-1)=0$.

وأخيرا معادلة $(ABC)$ هي : $\boxed{x+y-z-4=0}$.

**3.** أ) $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$ .

إذن :

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

ومنه $G(2;4;2)$ .

ب) المستقيم $(\Delta)$ يمر بالنقطة $G$ ويعامد المستوي $(ABC)$ أي يمكن أن نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم $(\Delta)$ ،

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases}x=2+k\\y=4+k\\z=2-k\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ .

جـ) نلاحظ أن $S$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$.

$AS^2=AB^2$ يكافئ

$(t-1)^2+(t+2)^2+(1-t)^2=18$ .

أي $3t^2+6=18$ ومنه $t\in\{2;-2\}$ .

ومنه $S(4;6;0)$ أو $S(0;2;4)$ .

د) $F$ تنتمي إلى $(\Delta)$ ومنه المثلثات $FGA$ ، $FGB$ و $FGC$ قائمة ومتقايسة لأن $GA=GB=GC$ ومنه $FA=FB=FC=AB$ .

إذن: $FABC$ رباعي الوجوه منتظم .

• $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times FG=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)FG$ .

لدينا $\overrightarrow{FG}(-2;-2;2)$ ومنه $FG=2\sqrt{3}$ .

إذن : $V=9u.v$ .

**4.** لدينا $\overrightarrow{FA}(-1;-4;1)$ و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$

ومنه $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{BC}=0$ .

إذن : المستقيمان $(FA)$ و $(BC)$ متعامدان .

**5.** أ) لتكن $I$ منتصف قطعة المستقيم $[FG]$.

$\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$ يكافئ $\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IF}\|=6$

أي $\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$ يكافئ $2\overrightarrow{MI}=6$

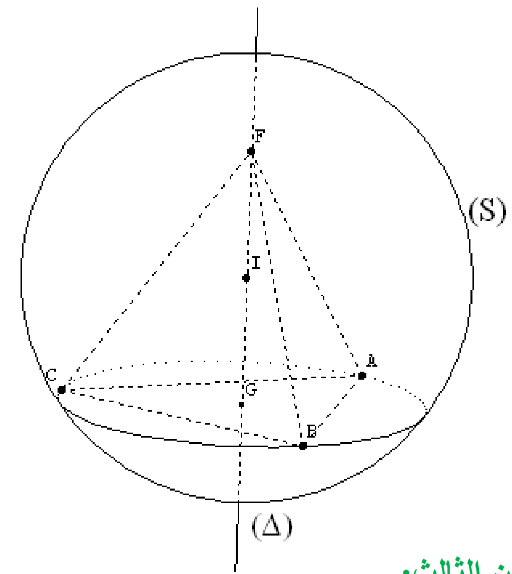
إذن:المجموعة $(S)$ هي سطح الكرة التي مركزها $I$ ونصف قطرها 3 .

ب) بما أن $I$ تنتمي إلى $(\Delta)$ فإن $IG=d(ABC;I)=\sqrt{3}$ .

ومنه المجموعة $(S)$ والمستوي $(ABC)$ يتقاطعان في دائرة مركزها $G$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$ .

بما أن متوسط المثلث المتقايس الأضلاع $ABC$ يساوي $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ فإن $AG=\frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)=\sqrt{6}$ .

إذن : المجموعة $(S)$ والمستوي $(ABC)$ يتقاطعان في دائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ .




### ♣ التمرين الثالث:

**1.** $f$ معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\sqrt{x+1}$

أ) $1\le\alpha\le2$ .

ب)

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $+$ | $0$ | - | |

• إذا كان $0\le x\le\alpha$ فإن $f(0)\ge f(x)\ge f(\alpha)=0$ .

• إذا كان $x\ge\alpha$ فإن $f(x)\le f(\alpha)=0$ .

( $f$ متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ )

## الموضوع الأول(3)

**2.** المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$ .

أ) حساب $u_1$ و $u_2$ ثم $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}$ .

$u_1=\sqrt{2}=1.414$ ، $u_2=\sqrt{1+\sqrt{2}}=1.554$ و

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}=u_3=1.598$ .

ب) نبرهن بالتراجع على الخاصية التالية :

من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1\le u_n\le\alpha$.

• من أجل $n=0$ ، $u_0=1$ أي $1\le u_0\le\alpha$.

• نفرض أن $1\le u_n\le\alpha$ من أجل $n\ge 0$.

• نبرهن أن $1\le u_{n+1}\le\alpha$.

لدينا $1\le u_n\le\alpha$ ومنه $2\le u_n+1\le\alpha+1$.

وبما أن الدالة الجذر التربيعي متزايدة فإن

$\sqrt{2}\le\sqrt{u_n+1}\le\sqrt{\alpha+1}$ ومنه

$1\le\sqrt{2}\le\sqrt{u_n+1}\le\sqrt{\alpha+1}=\alpha$

لأن $f(\alpha)=0$ .

إذن : $1\le u_{n+1}\le\alpha$ .

وأخيرا، من أجل كل عدد طبيعي $n$، $1\le u_n\le\alpha$.

جـ) لدينا $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$ و $1\le u_n\le\alpha$ .

بما أن $f(x)\ge 0$ موجبة على المجال $[0;\alpha]$ فإن

$u_{n+1}-u_n\ge 0$ .

إذن : المتتالية $(u_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$ .

• المتتالية $(u_n)$ متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة. أي $\lim u_n=l$ .

د) لدينا $\lim u_n=l$ ومنه $l=\sqrt{l+1}$ أي

$f(l)=0$ : إذن $l=\alpha$ .

$f(\alpha)=0$ يكافئ $\alpha^2-\alpha-1=0$

أي $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

بما أن $u_n>0$ فإن $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ( العدد الذهبي )



### ♣ التمرين الرابع:

$k$ عدد حقيقي موجب تماما ، $f_k$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=x-1+xe^{kx}$ .

**I-** $g_k$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x)=1+(1+kx)e^{kx}$ .

**1.** $g_k$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$g_k'(x)=k(2+kx)e^{kx}$

• $g_k'(x)=0$ يكافئ $2+kx=0$ أي $x=-\frac{2}{k}$ .

إذن :

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $-2/k$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g_k'(x)$ | - $\quad$ 0 $\quad$ + |

$k$ عدد حقيقي موجب تماما و $e^{kx}>0$ .

**2.** جدول تغيرات الدالة $g_k$ .

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $-2/k$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g_k'(x)$ | - $\quad$ 0 $\quad$ + |
| $g_k(x)$ | ↘ $\quad$ $1-e^{-2}$ $\quad$ ↗ |

حسب جدول التغيرات $g_k(x)\ge 1-e^{-2}>0$ .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي $x$، $g_k(x)>0$ .

**II-1.** أ) لدينا $f_k(0)=-1$ .

إذن:جميع المنحنيات $(C_k)$ تمر بالنقطة $I(0;-1)$.

ب)

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}x(1+e^{kx})=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=+\infty$ .

جـ) $(D)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_k)$ بجوار $-\infty$ بالفعل:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)-(x-1)=\frac{1}{k}\lim\limits_{x\to-\infty}kxe^{kx}=0$ .

**2.** • $f_k$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$f_k'(x)=1+(1+kx)e^{kx}=g_k(x)>0$

إذن : الدالة $f_k$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

• جدول تغيراتها الدالة $f_k$ .

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_k'(x)$ | + |
| $f_k(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

## الموضوع الأول(4)

**3.** أ) معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_k)$:

لدينا $f_k'(0)=g_k(0)=2$ و $f_k(0)=-1$ ومنه $y=f_k'(0)(x-0)+f_k(0)=2x-1$

ب) بما أن $f_k'(x)=g_k(x)$ فإن $f_k''(x)=g_k'(x)$

لدينا مما سبق $f_k''(x)$ ينعدم عند $-\dfrac{2}{k}$ ويغير إشارته عندها

إذن : النقطة $F_k\left(-\dfrac{2}{k};f_k(-\dfrac{2}{k})\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_k)$، أي $F_k\left(-\dfrac{2}{k};-\dfrac{2}{k}(1+e^{-2})-1\right)$.

**4.** أ) حسب جدول التغيرات الدالة $f_k$ دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$ و $f_k(0)\times f_k(1)=-e^k<0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $]0;1[$ بحيث $f_k(\alpha)=0$.
( $\alpha$ حل للمعادلة $f_k(x)=0$ )

ب) لتكن $d$ المسافة بين النقطة $N(\alpha;f_1(\alpha))$ والمستقيم $(D)$.

ومنه $d=\dfrac{|\alpha-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$. $((\alpha-1<0))$

لدينا أيضا $f_1(\alpha)=0$ ومنه $\alpha e^{\alpha}=1-\alpha$.

إذن : $d=\alpha e^{\alpha}/\sqrt{2}$.

**5.** أ) من أجل كل عدد حقيقي $x$ ،

$f_k(x)+f_{-k}(-x)=(x-1+xe^{kx})+(-x-1-xe^{kx})$

أي $f_k(x)+f_{-k}(-x)=-2$ .

• الاستنتاج :

إذا كانت $M(x;f_k(x))$ نقطة من $(C_k)$ فإن $M'(-x;-f_k(x)-2)$ نقطة من $(C_{-k})$.

وبما أن منتصف $[MM']$ هي النقطة $I(0;-1)$ فإن $(C_k)$ و $(C_{-k})$ متناظرين بالنسبة للنقطة $I$.

ب) المنحنى $(C_{-1})$.

**III-** $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx$ ، حيث $\lambda<0$.

**1.** من أجل كل عدد حقيقي $x\le 0$،
$(x-1)-f_k(x)=-xe^{kx}\ge 0$.

إذن : $I_k$ هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C_k)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\lambda$ و $y=x-1$.

**2.** $I_1=\int_{\lambda}^{0}-xe^{x}dx$

نضع $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=e^x\end{cases}$ ومنه

$I_1=\int_{\lambda}^{0}-xe^{x}dx=-xe^x+e^x]_{\lambda}^{0}$

إذن : $I_1=1+\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}$.

• $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_1=1$ .

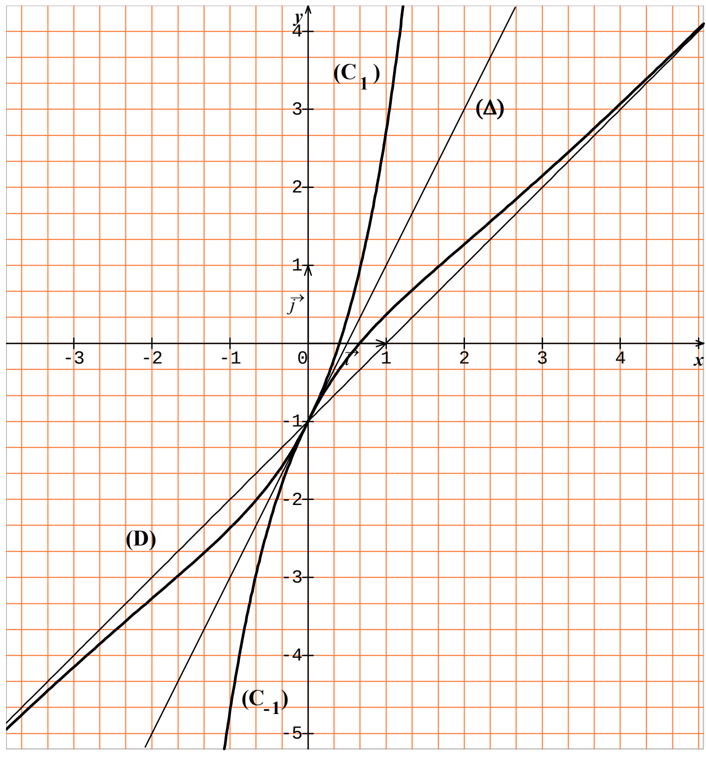
• هذه النهاية تعني أن مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C_k)$ ومحور التراتيب والمستقيم $(D)$ تساوي 1.

**3.** نضع $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=e^{kx}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=\dfrac{1}{k}e^{kx}\end{cases}$

ومنه $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx=-\dfrac{x}{k}e^{kx}+\dfrac{1}{k^2}e^{kx}]_{\lambda}^{0}$

إذن : $I_k=\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^2}\left(\lambda ke^{k\lambda}-e^{k\lambda}\right)$.

• $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_k=\dfrac{1}{k^2}$ . ( $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ )



## الموضوع الثاني(1)

### التمرين الأول :

**I-** $(1).......(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$

(1) يكافئ $(z+1)^2=\left[i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)\right]^2$ .

أي $z+1=-i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$ أو

$z+1=i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$ .

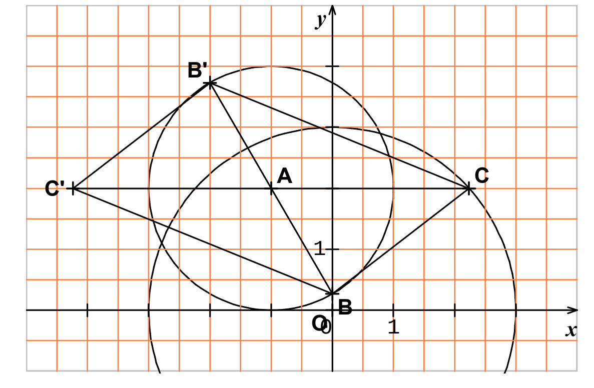
إذن : $z=\sqrt{5}-2i$ أو $z=-(2+\sqrt{5})+2i$ .

**II-** النقط $A$ ، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب $z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\sqrt{5}+2i$

**1.** حساب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$.

- $|z_C|=\sqrt{5+4}=3$
- $|z_B-z_A|=|1-i\sqrt{3}|=2$

إذن : $C$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها 3 و $B$ هي تقاطع الدائرة التي مركزها $A$ ونصف قطرها 2 مع محور التراتيب .




**2.** $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A$ ومنه

$z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1+i\sqrt{3})(2i-i\sqrt{3}+1-2i)-1+2i$

أي $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(4)-1+2i$ وأخيرا $z_{S(B)}=\sqrt{5}+2i$

إذن : $S(B)=C$

**3.** أ) $z_{C'}=2z_A-z_C$ أي $z_{C'}=-2+4i-\sqrt{5}-2i$

ومنه $z_{C'}=-(2+\sqrt{5})+2i$

ب) بما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع فإن النقطة $B'$ هي نظيرة النقطة $B$ بالنسبة للنقطة $A$ .

ومنه $z_{B'}=2z_A-z_B$

إذن : $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$ .

جـ) $z_{B'}-z_C=-(2+\sqrt{5})+i\sqrt{3}$

و $z_B-z_C=-\sqrt{5}-i\sqrt{3}$

ومنه $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{(-2-\sqrt{5}+i\sqrt{3})(-\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{8}$

أي $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1-i\sqrt{3})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

د) لدينا :

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

إذن: $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$

### التمرين الثاني:

**I-** $a$ ، $b$ و $c$ أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$ .

لدينا $b+c=\overline{46}^a$ و $bc=\overline{545}^a$ ومنه

$b+c=4a+6$ و $bc=5a^2+4a+5$

$b$ و $c$ هما حلا المعادلة التالية :

$(1)....x^2-2(2a+3)x+5a^2+4a+5=0$

ومنه $\Delta=4(-a^2+8a+4)$ .

المعادلة (1) تقبل حلول إذا وفقط إذا كان

$-a^2+8a+4\ge 0$.

$-a^2+8a+4\ge 0$ يكافئ $(a-4)^2\le 20$ أي

$a\in[4-\sqrt{20};4+\sqrt{20}]$ .

بما أن عدد طبيعي أكبر تماما من 6 فإن $a=7$ أو $a=8$ .

- إذا كان $a=7$ فإن $\Delta=11$ ( المعادلة (1) ليس لها حل في $\mathbb{N}$ .
- إذا كان $a=8$ فإن $\Delta=4$ ومنه حلا المعادلة (1) هما 17 و 21 .

بما أن $b\le c$ فإن $b=17$ و $c=21$ .

وأخيرا : $\boxed{a=8 \text{ ، } b=17 \text{ ، } c=21}$ .

## الموضوع الثاني(2)

**II-** نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث $x$ و $y$ من $\mathbb{N}$.

**1.** أ) $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) يكافئ $21x_0-17x_0=8$. إذن الثنائية $(2;2)$ حل للمعادلة (1).

ب) حل المعادلة (1) في $\mathbb{N}^2$ .

لدينا $\begin{cases}21x-17y=8\\21x_0-17x_0=8\end{cases}$ ومنه

$21(x-x_0)=17(y-y_0)$ ..(2)

إذن: $17/21(x-x_0)$ و $PGCD(17;21)=1$

ومنه حسب مبرهنة غوص $17/(x-x_0)$ أي $(x-x_0)=17k$ مع $k\in\mathbb{N}$ .

ومن (2) نحصل على $21(17k)=17(y-y_0)$ .

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\{(17k+2;21k+2),k\in\mathbb{N}\}$ .

**2.** أ) $9^0\equiv1[13]$ ، $9^1\equiv9[13]$ ، $9^2\equiv3[13]$ ،
$9^3\equiv1[13]$ .

من أجل كل عدد طبيعي $k$ ، $9^{3k+r}\equiv9^r[13]$ حيث $r\in\{0;1;2\}$ .

إذن : بواقي قسمة $9^n$ على 13 هي : 1 ، 9 ، 3.

ب) $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) يعني أن $17\beta=21\alpha-8$ .

$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{17\beta+10}-9^{21\alpha}-2[13]$

ومنه

$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$

$\equiv9^2-1-2[13]$

$\equiv0[13]$

**3.** أ) $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv0[4]$ أي و
$\begin{cases}17y=4(21\lambda-2)\\x=4\lambda\end{cases}$ .

إذن: $4/17y$ و $PGCD(17;4)=1$ ومنه حسب مبرهنة غوص $4/y$ . أي $y\equiv0[4]$ .

ب) $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) و $PGCD(x;y)=4$ .

إذن : $x\equiv0[4]$ يعني أن $17k+2\equiv0[4]$ أي $k=4\gamma+2$ .

ومنه $x=4(17\gamma+9)$ و $y=4(21\gamma+11)$ و $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$ . و لدينا أيضا
$PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=PGCD(17\gamma+9;2)$ .
( لأن $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) )

إذن: $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$ يعني أن $\gamma=2\beta$ .

وأخيرا : من أجل كل عدد طبيعي $\beta$ ، حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$ هي : $x=136\beta+36$ و $y=168\beta+44$ .

### ♣ التمرين الثالث :

لدينا النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$

**1.** حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(2;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$ .

ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4+4-8=0$ أي $(AB)\perp(AC)$ .

إذن: $ABC$ مثلث قائم في $A$ .

**2.** أ) • $G$ مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$

ومنه $G(0;0;-2)$ .

• $I$ منتصف قطعة المستقيم $[AC]$ .

ومنه $I(2;1;0)$ .

ب) لدينا $\overrightarrow{GI}(2;1;2)$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GI}$ .

ومنه الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع.

**3.** أ) $\overrightarrow{AG}(-1;1;-4)$ ، $\overrightarrow{BG}(-3;0;-6)$ و $\overrightarrow{CG}(-3;-3;0)$ .

ومنه $AG^2=18$ ، $BG^2=45$ و $CG^2=18$ .

ب) $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$ ....(2)

باستعمال علاقة شال والمرجح $G$ (2) تصبح :

$3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=18$

أي $2MG^2+3GA^2-2GB^2+GC^2=18$ لأن

$2\overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$

إذن : (2) تكافئ $2MG^2=36$ .

وأخيرا مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق(2) هي سطح كرة مركزه $G$ ونصف قطره $3\sqrt{2}$ .

**4.** $(S)$ سطح الكرة الذي مركزه $G$ ونصف قطره $3\sqrt{2}$ .

أ) $M(x;y;z)\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$ .

بما أن $\overrightarrow{MG}(-x;-y;-2-z)$ و $\vec{V}(-6;-6;0)$ فإن

$\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$ يكافئ $6x+6y=-18$ .

إذن المعادلة الديكارتية لـ $(P)$ هي $x+y+3=0$ .

## الموضوع الثاني(3)

ب) المستقيم $(\Delta)$ يمر بالنقطة $G$ ويعامد $(P)$، أي $\vec{n}(1;1;0)$ الشعاع الناظمي لـ $(P)$ هو شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ أي نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم $(\Delta)$.

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z-2 \end{cases}$ مع $t$ عدد حقيقي.

• الاستنتاج : $\{H\}=(P)\cap(\Delta)$.

ومنه $t+t+3=0$ أي $t=-\dfrac{3}{2}$.

وأخيرا : $H(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2};-2)$.

جـ) تعيين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

• $d(G,(P))=GH=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ ومنه

$(P)\cap(S)$ هي الدائرة التي مركزها $H$ ونصف قطرها $r$ حيث $r=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-HG^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$.

**5.** المستقيم $(D)$ معرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$.
مع $k$ عدد حقيقي.

• $(D)\subset(P)$ لأن $(-1-2k)+(-2+2k)+3=0$.

• $(D)$ يمر بالنقطة $E(-1;-2;0)$ ويوازي $\vec{u}(-2;2;-8)$

لدينا $\overrightarrow{AE}(-2;-1;-2)$ و $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

أي أن $E$ تنتمي إلى $(ABC)$ و $\vec{u}$ شعاع من $(ABC)$.

إذن: $(D)\subset(ABC)$. $(\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB})$

وأخيرا: المستويان $(P)$ و $(ABC)$ يتقاطعان في $(D)$.

### ♣ التمرين الرابع :

**I-** • الدالة $x\mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\dfrac{1}{x}=1$

أي $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

• نضع $X=x-1$ ومنه

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(X+1)}{X}=1$.

**II-** $f$ دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني.

**1.** أ) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ ،

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}\right)=\ln\left(x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\right)$$

ومنه $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

( $\sqrt{x^2}=|x|$ ، $\ln ab=\ln a+\ln b$ مع $a>0$ ، $b>0$ )

ب) من أجل $x\geq 1$ ،

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{x}{x}\sqrt{(1-x^2)\frac{x-1}{x+1}}$$

أي $\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$.

جـ) الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 1 بالفعل

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$$ ومنه

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty \quad (\lim_{x\to 1}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0)$$

إذن : المنحنى $(C_f)$ يقبل نصف مماس موازي لمحور التراتيب عند النقطة التي فاصلتها 1.

**2.** أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$ .

ب) $f$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و

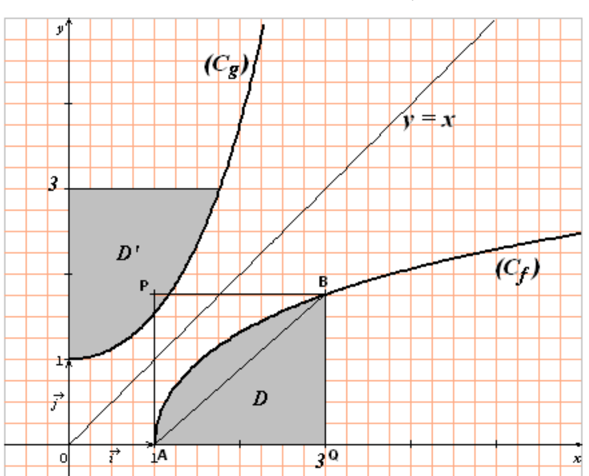
$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0.$$

• جدول تغير الدالة $f$.

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ $\qquad$ + |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ $+\infty$ |

## الموضوع الثاني(4)

جـ) المنحنى $(C_f)$.




**3.** أ) النقطة $A$ من $(C_f)$ أي $A(1;0)$ ، كذلك $B$ نقطة من $(C_f)$ فاصلتها 3 أي $B(3;f(3))$ حيث $f(3)=\ln(3+2\sqrt{2})=2\ln(1+\sqrt{2})$.

• مساحة المثلث $ABQ$ تساوي $f(3)$.

• مساحة المستطيل $APBQ$ تساوي $2f(3)$.

ب) نلاحظ أن المساحة $S$ محصورة بين مساحة المثلث $ABQ$ و مساحة المستطيل $APBQ$.

إذن : $2\ln(1+\sqrt{2})\le S\le 4\ln(1+\sqrt{2})$

**III-** $g$ الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و $(C_g)$ تمثيلها البياني.

**1.** من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$، لدينا

$g(x)-1=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{2e^x}=\dfrac{(e^x-1)^2}{2e^x}\ge 0$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$ ، $g(x)\ge 1$.

**2.** أ) $g\circ f(x)=g(f(x))$ ومنه

$$g\circ f(x)=\frac{e^{2f(x)}+1}{2e^{f(x)}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})}$$

أي $g\circ f(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})}=x$.

• $M(x;y)$ نقطة من $(C_f)$ يعني أن $y=f(x)$ ، وبما أن $g(f(x))=x$ فإن $M'(f(x);x)$ نقطة من $(C_g)$.

ب) بما أن المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس فإن المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$. (المنصف الأول).

**3.** $S'$ مساحة الحيز $D'$ المحدد بالمنحنى $(C_g)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$.

أ) $S'=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}(3-g(x))dx$ أي

$S'=3x]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ومنه

$S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ .

ب) حساب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ .

$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$ ومنه

$$\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})]_0^{2ln(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2\right]$$

و أخيرا : $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=2\sqrt{2}$.

• بما أن $(C_f)$ و $(C_g)$ متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ فإن $D=D'$ و منه $S=S'$ .

إذن : $S=S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$

$=6\ln(1+\sqrt{2})-2\sqrt{2}u.a$

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــــوادي — المؤسستان:- مدرسة سبل النجاح الخاصة
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — - ثانوية السعيد عبد الحـــــي
الشعبة: علوم تجريبية — (دورة: ماي 2016)

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضـــوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطة $A(-2\,,-1\,,0)$ والمستويين $(P_1)$ و $(P_2)$
اللذين معادلة كل منهما $3x+y+3=0$ و $2x-z+3=0$ على الترتيب

1) أ/ بين أن المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ له تمثيلا وسيطيا كما يلي :

$$(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=-3t-3 \\ z=2t+3 \end{cases} \quad \cdot \quad (t \in \mathcal{R})$$

ب/ تحقق أن النقطة $A$ لا تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$

2) أ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ الذي يشمل النقطة $A$ و يوازي $(\Delta)$

ب/ عين إحداثيات النقطة $B$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(\Delta)$

- ثم استنتج المسافة بين المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$

3) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق : $MA^2+MB^2=4AI^2$ حيث $I$ منتصف [AB]

أ/ عين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ وحدد عناصرها المميزة

ب/ استنتج تقاطع المجموعة $(\Gamma)$ مع المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$

### التمرين الثاني: ( 4.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ الآتية : $(Z-4-2i)(Z^2-2Z+2)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{U},\vec{V})$ ، نعتبر النقط A ، B وC التي لواحقها :

$Z_A=1+i$ ، $Z_B=4+2i$ و $Z_C=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}i$ على الترتيب

أ/ بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $B$ ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه $S$

ب/ عين $Z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالتشابه $S$

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه $S$ هو المثلث BCD ثم استنتج مساحة المثلث BCD

4) لتكن $(E)$ مجموعة النقط من المستوي حيث : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}=0$

أ/عين طبيعة المجموعة $(E)$ وحدد عناصرها المميزة

ب/تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ثم استنتج طبيعة المثلث $ACD$

**التمرين الثالث ( 4,5 نقطة)**

في الشكل المقابل $(C_f)$ هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال [3 , 0] بـ:

$f(x)=\frac{2}{x+1}$ و $(d)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1 - $(U_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول : $U_0=3$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1}=f(U_n)$

أ/ مثل الحدود $U_0$ . $U_1$ ، $U_2$، $U_3$، $U_4$، $U_5$ و $U_6$ على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل(وذلك في الوثيقة المرفقة).

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية $(U_n)$ وتقاربها

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(U_{2n})$ و المتتالية $(U_{2n+1})$

2 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\le U_n\le 3$

3 - $(V_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+2}$

أ- بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يطلب تعيين حدّها الأول

ب- أكتب $V_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $U_n$ بدلالة $n$

ج- احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟

**التمرين الرابع : (07 نقاط)**

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=xe^x+e^x-1$

1 - بين أن: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2 - ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها

3 - أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^x-x$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول هي $1cm$)

1. احسب نهايتي الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$

2. أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها

3. أ/ بين ان المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$

4. أ/ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثييها

ب/ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ $(\Delta)$ و المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $xe^x=m$

5. a بين أن : $x\mapsto(x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

b احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x=-1$ و $x=0$

## الموضـــوع الثاني

**التمرين الأول :( 04 نقاط)**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(-3,3,2)$ ، $B(-2,1,0)$

$E(0,0,2)$ و $F(0,3,-1)$ و (p) المستوي الذي $2x+2y-z+2=0$ ، معادلة ديكارتية له

و (Q) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(Q)\ \begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=4\alpha-2\beta+1 \\ z=\alpha-2\beta-2 \end{cases}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان

1. أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
   ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q)
   ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB)
2. أ عين المركز $C$ ونصف القطر $r$ لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين $E$ و $F$ على الترتيب
   ب استنتج بعد النقطة $C$ عن كل من المستويين (p) و (Q)
3. a/ تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته
   b/ بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC)
   c/ احسب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF

**التمرين الثاني :( 4,5 نقاط)**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{U},\vec{V})$ ، $L$ العدد المركب المعرف بـ : $L=\frac{\alpha+\beta i}{3+5i}$

حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان

**1** عين $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون: $|L|=1$ و $\arg(L)=\frac{\pi}{4}$

**2)** نضع : $\alpha=-\sqrt{2}$ و $\beta=4\sqrt{2}$

أ/ عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $L^n$ عددا حقيقيا موجبا

ب/ بين أن: $L^{2016}=1$ ، ثم احسب $\left(-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i\right)^{2016}-(3+5i)^{2016}$

**3)** النقطتان A وB لاحقتاهما على الترتيب :

$Z_B=3+5i$ ، $Z_A=-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA

جـ/ بين أن: $AB=\sqrt{34\left(2-\sqrt{2}\right)}$

**4)** لتكن النقطة G منتصف $[AB]$ و $M$ نقطة كيفية من المستوي المركب

أ بين أن : $MA^2+MB^2=2MG^2+17\left(2-\sqrt{2}\right)$

ب عين مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $MA^2+MB^2=42-17\sqrt{2}$

**التمرين الثالث : (4.5 نقط)**

$(U_n)$ متتالية عددية **معرفة** كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}U_n$

1 **أ/** احسب $U_2$ و $U_3$

**ب/** برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $U_n > 0$

**ج/** ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)$ ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

2 نعتبر المتتالية العددية $(V_n)$ المعرفة كمايلي :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $V_n = n2^nU_n$

**أ/** بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول $V_1$

**ب/** أكتب كلا من $V_n$ و $U_n$ بدلالة $n$ ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية $(U_n)$

3 **1/** احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + V_n$

**2/** احسب بدلالة $n$ الجداء $P_n$ حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots \times (nU_n)$

**التمرين الرابع: (07 نقط)**

**I)** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2lnx$

1 احسب نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة

2 ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0, +\infty[$

3 احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

**II)** لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (lnx)^2$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

تربية أون لاين

**.1 أ/** اثبت أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = 0$ ، ( مساعدة : نضع $t = \sqrt{x}$ )

**ب/** استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

**.2** 1 تحقق أن : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

2 اعط تفسيرا بيانيا للنتائج

**.3** بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0, +\infty[$ : $f'(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

**.4** استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها

**.5** ارسم المنحنى $(C_f)$

**.6 أ/** اثبت أن: $x \mapsto xlnx - x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x \mapsto lnx$ على المجال $]0, +\infty[$

**ب/** باستعمال المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e (lnx)^2\,dx = e - 2$

**ج/** احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x = 1$ و $x = e$

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الــــــوادي — المؤسستان:- مدرسة سبل النجاح الخاصة
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — ثانوية السعيد عبد الحــــــي
الشعبة: علوم تجريبية — (دورة: ماي 2016)

---

الاجابة النموذجية لامتحان الباكلوريا التجريبية

---

## الموضــوع الأول

**التمرين الأول: ( 04 نقاط)**

1 أ/ بين أن المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$

$(\Delta) \subset (P_1): 3(t) + (-3t - 3) + 3 = 0$ أي $0 = 0$

$(\Delta) \subset (P_2): 2(t) - (2t + 3) + 3 = 0$ أي $0 = 0$

ب/ تحقق أن النقطة $A$ لا تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$

$$A \notin (\Delta) \text{ لان } \begin{cases} -2 = t \\ -1 = -3t - 3 \; ; \; t = -\frac{2}{3} \\ 0 = 2t + 3 \; ; \; t = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathcal{R})$$

2 أ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ الذي يشمل النقطة $A$ و يوازي $(\Delta)$ :

$(d) \ni M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{U}_{(\Delta)}$ ومنه

$$(d): \begin{cases} x = \lambda - 2 \\ y = -3\lambda - 1 \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad (t \in \mathcal{R})$$

ب/ عين إحداثيات النقطة $B$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(\Delta)$

$B \in (\Delta)$ , $B(t \, , \, -3t - 3 \, , \, 2t + 3)$

إذن: $\overrightarrow{AB}.\vec{U}_{(\Delta)} = 0$ و لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ 2t+3 \end{pmatrix}$ إذن: $\begin{pmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ 2t+3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

ومنه $t = -1$ وبالتالي $B(-1 \, , \, 0 \, , \, 1)$

- ثم استنتج المسافة بين المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$

$$AB = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (0 + 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{3}$$

3 أ/ عين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ وحدد عناصرها المميزة

لدينا $I$ منتصف $[AB]$ أي : $AB = 2AI$ ومنه : $MA^2 + MB^2 = 4AI^2$

تكافئ : $MA^2 + MB^2 = (2AI)^2$ ومنه نستلزم: $MA^2 + MB^2 = AB^2$ ومنه النقط A ، B و $M$ تحقق نظرية فيتاغورس وبالتالي $(\Gamma)$ هي سطح كرة قطرها AB ومركزها $I$

ب/ استنتج تقاطع المجموعة $(\Gamma)$ مع المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$ :

بما أن : $B \in (\Delta)$ و $A \in (d)$ و $(\Gamma)$ هي دائرة قطرها AB فإن: $(\Gamma) \cap (\Delta) = \{B\}$ و $(\Gamma) \cap (d) = \{A\}$

**التمرين الثاني:( 4.5 نقط)** (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ الآتية : $(Z-4-2i)(Z^2-2Z+2)=0$

أي: $\begin{cases} Z-4-2i=0 \\ Z^2-2Z+2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} Z=4+2i \\ Z^2-2Z+2=0 \end{cases}$

$Z^2-2Z+2=0$ نحسب المميز $\Delta$ نجد : $\Delta=-4=4i^2$ ومنه $Z_1=1+i$ و $Z_2=1-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $S=\{4+2i\,,\ 1+i\,,1-i\}$

(2 أ/ بين أن : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ : $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

المثلث BAC قائم في $B$ ومساحته : $S_{BAC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{10}{4}}}{2}=\frac{10}{4}$ و.م

(3 أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه $S$ :

لدينا: $\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}=\frac{1}{2}i$ أي : $(z_C-z_B)=\frac{1}{2}i(z_A-z_B)$ وبعد التبسيط نجد : $Z_C=\frac{1}{2}i\,Z_A+5$

إذن العبارة المركبة للتشابه هي : $Z'=\frac{1}{2}i\,Z+5$

ب/ عين $Z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالتشابه $S$

$Z_D=\frac{1}{2}i\,Z_C+5=\frac{19}{4}+i\frac{9}{4}$

جـ/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه $S$ هو المثلث BCD ثم استنتج مساحة المثلث BCD

$S$ تشابه مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ ويحول A إلى $C$ ويحول $C$ إلى $D$ ومنه صورة المثلث BAC بالتشابه $S$ هو المثلث BCD

$S_{BCD}=\frac{CB\times BD}{2}=\frac{\frac{1}{2}AB\times\frac{1}{2}BC}{2}=\frac{\frac{1}{4}AB\times BC}{2}=\frac{S_{BAC}}{4}=\frac{10}{16}$ و م

(4 أ/عين طبيعة المجموعة $(E)$ وحدد عناصرها المميزة:

$(E)$ هي دائرة قطرها $AD$ أي : $(E):(x-x_A)(x-x_D)+(y-y_A)(y-y_D)=0$

ومنه : $(E):x^2+y^2-\frac{23}{4}x-\frac{13}{4}y+7=0$ وبالتالي هي دائرة مركزها $G\left(\frac{23}{8}\,;\frac{13}{4}\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{7}$

ب/تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

$C\ \square\ (E)\ \square\ \left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{23}{4}\left(\frac{9}{2}\right)-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{2}\right)+7=0$ اي $0=0$

ومنه المثلث $ACD$ قائم في النقطة $C$

**التمرين الثالث ( 4,5 نقط)** نعتبر المتتالية $(u_n)$: $\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=f(U_n)=\frac{2}{U_n+1} \end{cases}$

1 أ/ تمثيل الحدود $U_0$ . $U_1$ ، $U_2$، $U_3$، $U_4$، $U_5$ و $U_6$ على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب/ ضع تخمينا حول رتابة المتتالية $(U_n)$ وتقاربها

$(U_n)$ متتالية غير رتيبة وهي متقاربة نحو العدد 1

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(U_{2n})$ و المتتالية $(U_{2n+1})$

من التمثيل نستنتج أن المتتالية $(U_{2n})$ متتالية متناقصة والمتتالية $(U_{2n+1})$ متتالية متزايدة

**2** برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le U_n \le 3$

من اجل $n = 0$ : $0 \le U_0 \le 3$ أي $0 \le 3 \le 3$ القضية صحيحة

نفرض أن $0 \le U_n \le 3$ ونثبت صحة القضية $0 \le U_{n+1} \le 3$

لدينا : $0 \le U_n \le 3$ ، وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد: $1 \le U_n + 1 \le 4$ وبقلب طرفي المتباينة وضرب

الطرفين في (2) نجد : $1 \le \frac{2}{U_n+1} \le \frac{2}{4}$ أي $\frac{1}{2} \le U_{n+1} \le 1$ ومنه : $0 \le U_{n+1} \le 3$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \le U_n \le 3$

**3** **أ-** بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يطلب تعيين حدّها الأول

لدينا : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$ ومنه $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}$

أي $V_{n+1} = \frac{\frac{2}{U_n+1}-1}{\frac{2}{U_n+1}+2}$ إذن : $V_{n+1} = \frac{-U_n+1}{2U_n+4}$

وبأخذ $\left(\frac{-1}{2}\right)$ عامل مشترك نجد : $V_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{U_n-1}{U_n+2}\right)$ أي $V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n$

إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\left(q = -\frac{1}{2}\right)$ وحدها الأول: $V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+2} = \frac{2}{5}$

**ب-** أكتب $V_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $U_n$ بدلالة $n$

$V_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ومن العبارة $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$ نجد: $U_n = \frac{2V_n-1}{V_n-1}$ إذن : $U_n = \frac{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}$

**ج-** احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

ومنه نستنتج أن : $(U_n)$ متتالية متقاربة نحو العدد 1

<u>التمرين الرابع</u> (07نقاط): I نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

**1** بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + e^x - 1 = -1$ ومنه $y = -1$ معادلة لمستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

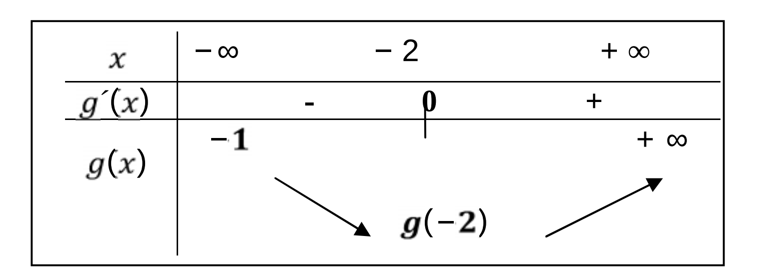
**2** ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها :

<u>نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:</u> $g'(x) = e^x(x+2)$

ومنه من اجل كل عدد حقيقي: $g'(x) = 0$

إذا كان : $(x+2) = 0$ أي $x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | 0 | + |



| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↘ | $g(-2)$ | ↗ | $+\infty$ |

3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$:

ومنه: $g(0) = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | - | $0$ | + | |

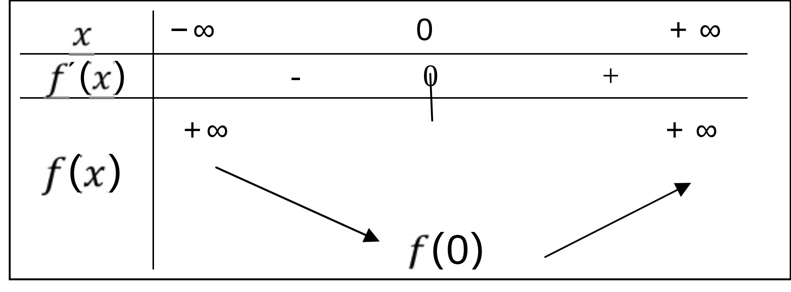
(II لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

1) احسب نهايتي الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = xe^x + e^x - 1 = g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها:

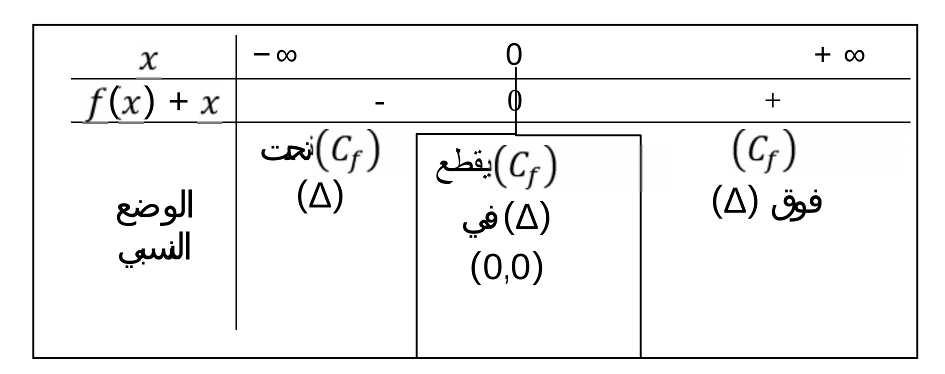


| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(0)$ | ↗ | $+\infty$ |

3) أ/ بين ان المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ ومنه المستقيم $(\Delta)$ ذوالمعادلة $y = -x$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$:



| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) + x$ | | - | 0 | + | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في $(0,0)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | |

4 أ/ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين احداثييها:

$f'(x) = g(x)$ اذن : $f''(x) = g'(x)$

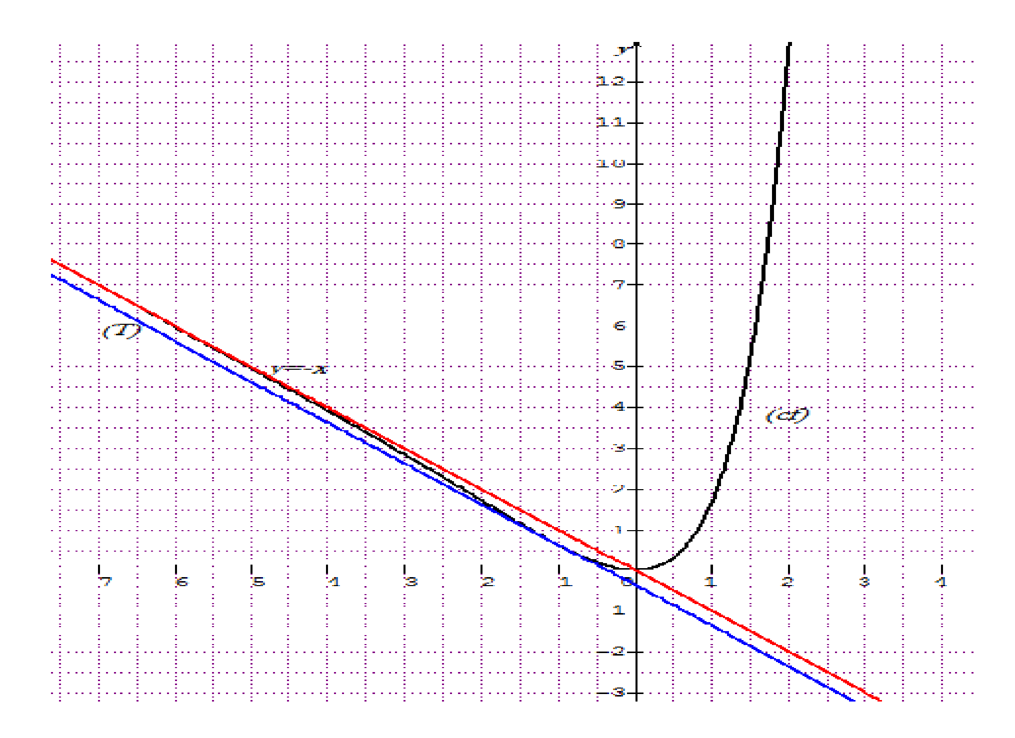
ومنه $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف عند : $x = -2$ وهي: $w(-2\ ,-2e^{-2} + 2)$

ب/ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له :

$(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ يعني أن : $f'(x) = -1$ أي: $x = -1$

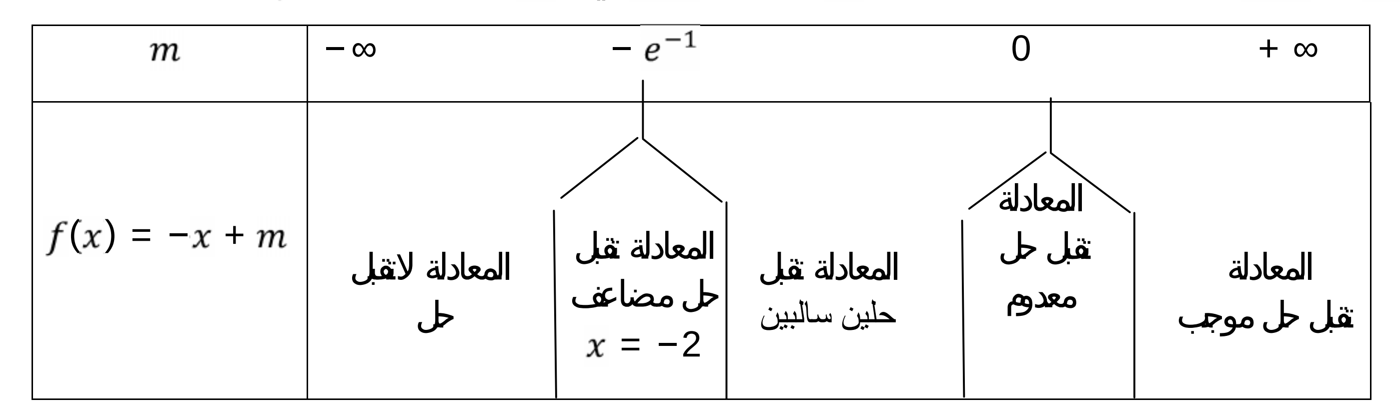
**معادلة $(T)$ :** $(T): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ إذن: $y_T = -x - e^{-1}$

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم انشئ $(\Delta)$ و المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$




د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $xe^x = m$

$xe^x = m$ فمن اجل كل عدد حقيقي $x$ $xe^x - x = m - x$ أي : $f(x) = -x + m$



| $m$ | $-\infty$ | $-e^{-1}$ | | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = -x + m$ | المعادلة لاتقبل حل | المعادلة تقبل حل مضاعف $x = -2$ | المعادلة تقبل حلين سالبين | المعادلة تقبل حل معدوم | المعادلة تقبل حل موجب |

5 a/ بين أن : $x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$ :

$$((x-1)e^x)' = xe^x$$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = -1$ و $x = 0$

مساحة الحيز هي :

$$\int_{-1}^{0}[-x - f(x)]dx = \int_{-1}^{0}[-xe^x]dx = -\int_{-1}^{0}[xe^x]dx = -[(x-1)e^x]_{-1}^{0} = 1 - 2e^{-1}$$

ومنه مساحة الحيز هي 0.624 وحدة مساحة

## الموضـــوع الثاني

**التمرين الأول: ( 04 نقاط)**

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB):

$(AB): \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ ومنه :

$$(AB): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = -2t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathcal{R})$$

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q):

لدينا : $\begin{cases} x = \alpha + \beta \;\cdots\cdots\cdots\; (1) \\ y = 4\alpha - 2\beta + 1 \;\cdots\cdots\; (2) \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \;\cdots\cdots\; (3) \end{cases}$ : من $((1) - (3))$ نجد $\beta = \frac{x-z-2}{3}$

ومن (1) نجد: $\alpha = x - \beta = \frac{2x+z+2}{3}$ وبالتعويض في (2) نجد: $(Q) : 2x - y + 2z + 5 = 0$

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB):

$\vec{n}_p . \vec{n}_Q = 0$ اذن : $\vec{n}_p \perp \vec{n}_Q$ ومنه المستويين (p) و (Q) متعامدان

$(AB) \subset (p) \Leftrightarrow 2(t-3) + 2(-2t+3) - (-2t+2) + 2 = 0$ أي $0 = 0$

$(\Delta) \subset (Q) \Leftrightarrow 2(t-3) - (-2t+3) + 2(-2t+2) + 5 = 0$ أي $0 = 0$

2 أ/ عين المركز C ونصف القطر r لسطح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

المركز C هو نقطة تقاطع المستقيمين $(CE)$ و $(CF)$ ومنه : $\begin{cases} (CE): \overrightarrow{EM} = t\vec{n}_p \\ (CF): \overrightarrow{FM} = \lambda\vec{n}_Q \end{cases}$

إذن : $(CE): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathcal{R})$

و $(CF): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathcal{R})$

$(CE) \cap (CF)$ يعني أن :

$$\begin{cases} 2t = 2\lambda \\ 2t = -\lambda + 3 \\ -t + 2 = 2\lambda - 1 \end{cases}$$

ومنه $t = \lambda = 1$ أي : $C(2, 2, 1)$ ونصف القطر $r = CE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2} = 3$

ب/ لنستنتج بعد النقطة C عن كل من المستويين (p) و (Q):

المسافة بين C والمستويين (p) و $(Q)$ هي: $CE = CF = r = 3$

**3** /**a** تحقق أن المثلث ABC قائم في النقطة B ثم احسب مساحته

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ أي $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة B

إذن: وم $S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3\times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

/**b** بين أن $\overrightarrow{EF}$ عمودي على المستوي (ABC):

$\begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ أي: $\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \mathbf{0}$ و $\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

/**c** احسب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF:

$V_{ABCE} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times EI$.

و $V_{ABCF} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times FI$ حيث I منتصف [EF]

إذن: $V_{ABCE} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}\ (U.V)$

و $V_{ABCF} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}\ (U.V)$

**ملاحظة:** يمكن حساب حجمي رباعيي الوجوه ABCE و ABCF باعتبار ان : الارتفاع هو CE و CF والقاعدة هي المثلث ABE و ABF على الترتيب

**التمرين الثاني: (4,5 نقط):**

**1)** عين $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$:

لدينا : $L = \frac{\alpha+\beta i}{3+5i} = \frac{(\alpha+\beta i)\times(3-5i)}{(3+5i)\times(3-5i)} = \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} + i\frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن: $\begin{cases} \frac{(3\alpha+5\beta)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(3\beta-5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 17\sqrt{2} \\ 3\beta - 5\alpha = 17\sqrt{2} \end{cases}$ وبحل جملة المعادلتين نجد : $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

**2)** أ/ عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $L^n$ عددا حقيقيا موجبا:

**لدينا:** $L = e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن : $L^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ومنه : يكون $L^n$ عددا حقيقيا موجبا إذا كان: $\arg(L) = 2k\pi$

**أي** : $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ وبالتالي : $k \in \mathbb{Z}$ ; $n = 8k$

**ب/** بين أن: $L^{2016} = 1$ ، ثم احسب $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$:

$L^{2016} = e^{i\frac{2016\pi}{4}} = e^{i8(252)\pi} = 1$

لدينا: $L^{2016} = 1$ أي $\left(\frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i}\right)^{2016} = 1$ إذن: $\frac{(-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{2016}}{(3+5i)^{2016}} = 1$

ومنه نستلزم : $(3+5i)^{2016} = \left(-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i\right)^{2016}$ أي : $\left(-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i\right)^{2016} - (3+5i)^{2016} = 0$

**3) أ/** عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

$(z_A - z_O) = a(z_B - z_O)$ إذن: $a = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{3+5i} = L = e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه **الدوران الذي مركزه** O ويحول B إلى A زاويته $\frac{\pi}{4}$




**ب/** استنتج طبيعة المثلث OBA: **المثلث** OBA مثلث متقايس الساقين

**جـ/** بين أن: $AB = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$ :

$AB = \sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2 + \left(5-4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{34(2-\sqrt{2})}$

**4) أ** بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$:

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2$$

$$= 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}\right) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2$$

$$= 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 = 2\overrightarrow{MG}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = 2MG^2 + \frac{(AB)^2}{2} = 2MG^2 + 17(2-\sqrt{2})$$

**أ** عين مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 1 + 17\sqrt{2}$

$MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$ أي : $2MG^2 + 17(2-\sqrt{2}) = 42 - 17\sqrt{2}$ ومنه : $2MG^2 = 8$

أي $MG = 2$ ومنه **مجموعة النقط** $M$ هي دائرة مركزها ونصف قطرها 2

**التمرين الثالث:(** 4,5 **نقط):** نعتبر المتتالية $U_n$ المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n \end{cases}$$

متتالية عددية **معرفة** كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

**1** **أ/** احسب $U_2$ و $U_3$ : $U_2 = \frac{1}{4(1+1)} U_1 = \frac{1}{32}$ **و** $U_3 = \frac{2}{4(2+1)} U_2 = \frac{1}{384}$

**ب/** برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $U_n > 0$

- من اجل $n = 1$ : $U_1 > 0$ أي $\frac{1}{4} > 0$ القضية صحيحة
- نفرض أن $U_n > 0$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > 0$
- لدينا : $U_n > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{n}{4(n+1)} > 0$ إذن : $\frac{n}{4(n+1)} U_n$ أي $U_{n+1} > 0$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)$ ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{4(n+1)}U_n - U_n = \frac{-3n-4}{4(n+1)}U_n < 0$$

ومنه المتتالية $(U_n)$ متناقصة ولكونها محدودة من الأسفل كذلك فهي متتالية متقاربة و نهايتها هي $l$ حيث:

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(l) = l$$

ومنه $f(l) = l$ تكافئ $\frac{n}{4(n+1)}l = l$ أي $\frac{-3n-4}{4(n+1)}l = 0$

و بما $\frac{-3n-4}{4(n+1)} \neq 0$ فإن $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2 أ/ بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول $V_1$ حيث: $V_n = n2^nU_n$:

لدينا: $V_n = n2^nU_n$ أي: $V_{n+1} = (n+1)2^{n+1}U_{n+1}$

$$= (n+1)2^n \times 2\frac{n}{4(n+1)}U_n$$

$$= \frac{1}{2}n2^nU_n$$

ومنه: $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\left(q = \frac{1}{2}\right)$ وحدها الاول: $V_1 = 1 \times 2 \times U_1 = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب كلا من $V_n$ و $U_n$ بدلالة $n$ ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية $(U_n)$:

$$V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$ و لدينا: $V_n = n2^nU_n$

نستلزم أن: $U_n = \frac{1}{n2^{2n}}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n2^{2n}} = 0$

وبالتالي متتالية متقاربة نحو 0

3 1/ احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + V_n$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

2/ احسب بدلالة $n$ الجداء $P_n$ حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \cdots\cdots \times (nU_n)$

لدينا: $V_n = n2^nU_n$ أي $U_n = \frac{1}{n2^n}V_n$ وبالتعويض في $P_n$ نجد:

$$P_n = \left(\frac{1}{2}V_1\right) \times \left(2 \times \frac{1}{2\times2^2}V_2\right) \times \left(3 \times \frac{1}{3\times2^3}V_3\right) \times \cdots\cdots \times \left(n \times \frac{1}{n\times2^n}V_n\right)$$

أي: $P_n = \left(\frac{V_1}{2}\right) \times \left(\frac{V_2}{2^2}\right) \times \left(\frac{V_3}{2^3}\right) \times \cdots\cdots \times \left(\frac{V_n}{2^n}\right)$

ومنه: $P_n = \frac{V_1 \times V_2 \times V_3 \times \cdots\cdots \times V_n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots\cdots \times 2^n}$

ولدينا: $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذن: $$P_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \cdots\cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots\cdots \times 2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)n}$$

**التمرين الرابع:** (07 نقاط):

نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2lnx$

1 احسب نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{lnx}{x}\right)\right] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} g(x) = \frac{x^2-1-2xlnx}{x} = -\infty$$

2 ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0,+\infty[$ :

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ إذن $g'(x) = 0$ أي : $x = 1$

لدينا من اجل كل $x\epsilon\,]0\ ,+\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة $g$ متزايدة تماما على $]0\ ,+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | + | 0 | + | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | | ↗ | | $-\infty$ |

3 احسب $g(1)$ ثم لستنتج إشارة $g(x)$

$g(1) = 0$

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

(II لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (lnx)^2$

1 أ/ اثبت أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = 0$ : ، ( مساعدة : نضع $t = \sqrt{x}$ )

نضع : $t = \sqrt{x}$ **اي** : $t^2 = x$ ومنه لما $x \to +\infty$ فإن : $t \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)^2}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(lnt^2)^2}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{2lnt}{t}\right)^2 = 0$$

ب/ لستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{(lnx)^2}{x}\right)\right] = +\infty$

2 1 تحقق أن : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} - 2 - \left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = f(x)$$

نضع : $t = \frac{1}{x}$ ومنه لما $x \overset{>}{\longrightarrow} 0$ فإن : $t \to +\infty$ اذن:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$$

2 اعط تفسيرا بيانيا للنتائج : $x = 0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

3 بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0, +\infty[$ : $f'(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

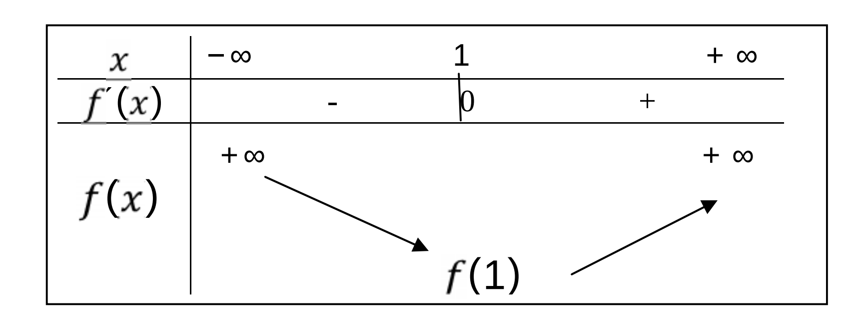
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{lnx}{x} = g(x) \times \frac{1}{x}$$

4 استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها:

ومنه من اجل كل $x \epsilon\, ]0\ ,+\infty[$ فإن

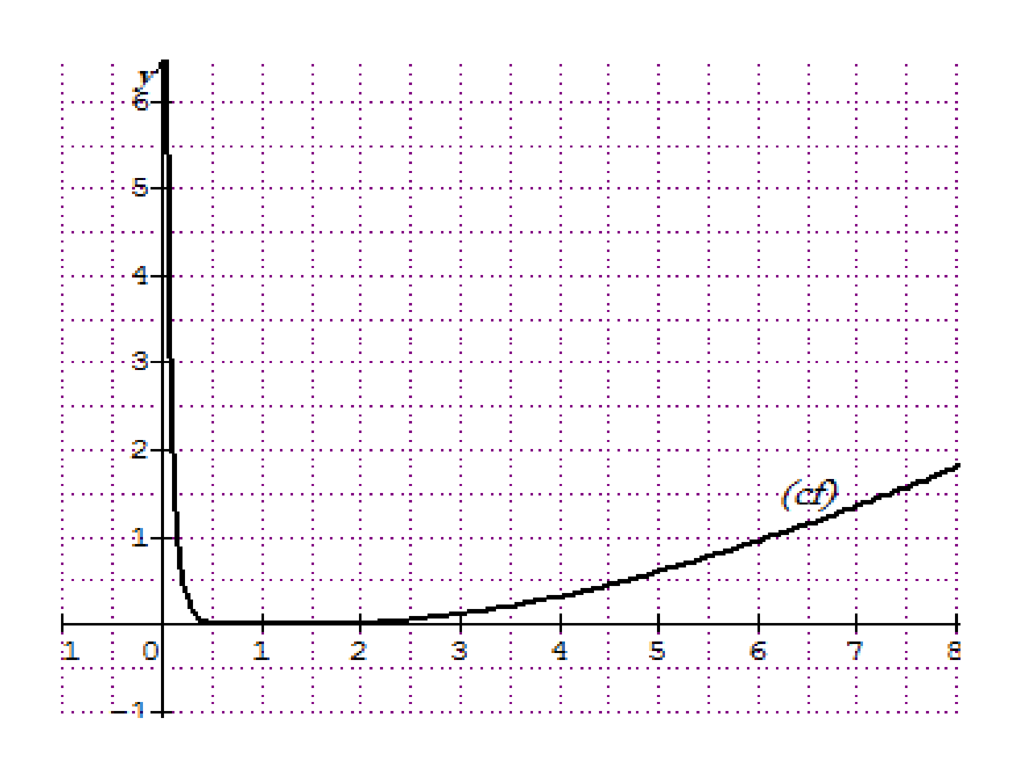
إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | - | 0 | + | |



| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(1)$ | ↗ | $+\infty$ |

5 ارسم المنحنى $(C_f)$



**6** **أ/** اثبت أن: $x \mapsto xlnx - x$ ، هي دالة أصلية للدالة : $x \mapsto lnx$ على المجال $]0, +\infty[$:

$$(xlnx - x)' = lnx + x \times \frac{1}{x} - 1 = lnx$$

**ب/** باستعمل المكاملة بالتجزئة تحقق أن : $\int_1^e (lnx)^2\, dx = e - 2$:

نضع: $\begin{cases} u(x) = (lnx)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} u'(x) = 2\frac{lnx}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ اذن:

$$\int_1^e (lnx)^2\, dx = [x(lnx)^2]_1^e - \int_1^e x2\frac{lnx}{x}\, dx = [x(lnx)^2]_1^e - 2\,[xlnx - x]_1^e = e - 2$$

**ج/** احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

مساحة الحيز هي : $\int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - 2 - (lnx)^2\right] dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) dx - \int_1^e (lnx)^2 dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + ln|x| - 2x\right]_1^e - (e - 2) = \frac{1}{2}e^2 - 3e + \frac{9}{2}$$

ومنه مساحة الحيز المطلوبة هي : $\frac{(e-3)^2}{2}$ وحدة مساحة

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية** — **ثانويات: مقاطعة الوادي 1**

**امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي** — **دورة : ماي 2016**

**الشعبة: رياضيات**

---

**اختبار في مادة: الرياضيات** — **المدة: 4 سا و 30 د**

---

**على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول(4 نقط):

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(1;4;-5)$ ، $B(3;2;-4)$ ، $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$

**1.** بين أن $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

**2.** اوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(T)$ الذي يشمل النقطة $D$ و يوازي $\vec{u}$

**3.** ليكن $(P)$ المستوي ذو المعادلة : $x-y-z-7=0$

أ) بين المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ ، يطلب اعطاء تمثيل وسيطي له

ب) بين أن المستقيمين $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي

**4.** لتكن النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ ، تحقق أن : $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$

**5.** لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع $\alpha$ عدد حقيقي

أ) اوجد بدلالة $\alpha$ معادلة ديكارتية لـ $(\Gamma)$ ، استنتج أن $(\Gamma)$ مستو و $\overrightarrow{EF}$ شعاع ناظمي له

ب) اوجد قيمة $\alpha$ حتى يكون $(\Gamma)$ المستوي المحوري للقطعة $[EF]$

### التمرين الثاني(5 نقط):

**I)** ليكن $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب $z$ حيث : $P(z)=z^3+z^2-4z+6$

**1.** اوجد الاعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث: $P(z)=(z+3)(az^2+bz+c)$

**2.** حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$

**II)** نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ ، $B$ و $C$

التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=\overline{z_B}$

**1.** $S$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=(1+i)z+i$

أ) ما طبيعة التحويل $S$ ؟ اوجد عناصره المميزة

ب) لتكن $M$ نقطة تختلف عن $A$ ، احسب $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MM'}$ ثم حدد طبيعة المثلث $AMM'$

**2.** ليكن $n$ عدد طبيعي و $M_n$ نقطة من المستوي تختلف عن $A$ لاحقتها العدد المركب $z_n$

نضع: $M_0=O$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $M_{n+1}=S(M_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فان : $z_n=(1+i)^n-1$

ب) أوجد قيم العدد الطبيعي $n$ حتى تكون النقط $O$ ، $A$ و $M_n$ على استقامية.

**التمرين الثالث(4 نقط):**

**I)** **1.** ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $3^n$ على 10

**2.** بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فان العدد $1+ 2019^{2n} + 2021^n + 7^{4n+1}$ يقبل القسمة على 10

**3.** اوجد مجموعة الاعداد الطبيعية $n$ بحيث : $23^{4n+3}+3n \equiv 0[10]$

**II)** **1.** حل المعادلة التفاضلية : $y'=(\ln 3)y$

**2.** نسمي $f$ الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق : $f(0)=1$ ، بين أن $f(x)=3^x$

**3.** ماهو رقم آحاد العدد $f(1437)+f(2016)$

**4.** نعتبر المجموع $S_n$ حيث : $S_n = f(0)+f(1)+\cdots+f(n)$

أ) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$

ب) أوجد الأعداد الطبيعة $n$ التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10

**التمرين الرابع(7):**

**I)** $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=-x^3+1-2\ln x$

**1.** ادرس تغيرات الدالة $g$ و شكل جدول تغيراتها

**2.** احسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

**II)** $f$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}-x+2$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

**1.** احسب نهايتي الدالة $f$ عند اطراف مجموعة تعريفها

**2.** أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

**3.** أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-x+2$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$

جـ) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ ، يطلب اعطاء معادلة له

**4.** ارسم كلا من $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$ ( تعطى $f(0,6)\approx 0$ و $f(2,2)\approx 0$ )

**5.** ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=-x+m$

**6.** لتكن الدالة $H$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $H(x)=-\dfrac{1+\ln x}{x}$

أ) تحقق ان الدالة $H$ دالة أصلية للدالة : $x\mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) نعتبر $S_\lambda$ مساحة الحيز المستوي $A$ المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=1$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda$ عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$

- بين أن : $S_\lambda=\dfrac{\lambda-1-\ln\lambda}{\lambda}$ ، ثم احسب $\lim_{\lambda\to+\infty} S_\lambda$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول(4):

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(1;0;-2)$ ، $B(3;1;0)$ و $C(1;0;1)$

**1.** أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها $A$ و تشمل $B$

**2.** لتكن $(\Delta)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

بين أن $(\Delta)$ مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ و يشمل النقطة $B$

**3.** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل $A$ و يعامد $(\Delta)$

**4.** أ) اوجد احداثيات النقطة $H$ نقطة تقاطع المستوي $(P)$ و المستقيم $(\Delta)$

ب) احسب بعد النقطة $A$ عن المستقيم $(\Delta)$ ، ثم استنتج أن $(\Delta)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ في نقطتين يطلب تعيين احداثييهما

**5.** $t$ عدد حقيقي و $G$ مرجح الجملة $\left\{\left(B;e^t\right),(C;1)\right\}$

أ) بين أن : $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t)=\dfrac{1}{1+e^t}$

جـ) استنتج مجموعة النقط $G$ لما يتغير $t$ في $\mathbb{R}$

### التمرين الثاني(5) :

المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$

التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4-i$ ، $z_B=4+i$ ، $z_C=1+2i$ و $z_D=-i$

**1.** ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $A$ و يحول $B$ الى $D$

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه $S$ محددا نسبته و زاويته

ب) اوجد $z_E$ لاحقة النقطة $E$ علما أن $O$ هي صورة $E$ بالتشابه $S$

**2.** أ) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي

ب) بين أن : $\cos\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right)=\dfrac{BC}{BD}$

جـ) استنتج أن المثلث $BCD$ قائم و متساوي الساقين

**3.** اثبت أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي الى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

**4.** $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث : $|2iz+2-9i|=1$

أ) تحقق أن النقطة $B$ تنتمي الى $(\Gamma)$

ب) عين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة

## التمرين الثالث(4):

I) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$

2. بين أنه اذا كان $x\in[1;2]$ فان : $f(x)\in[1;2]$

II) $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان معرفتان بـ: $u_0=1$ و $v_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$u_{n+1}=f(u_n) \quad و \quad v_{n+1}=f(v_n)$$

1. أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فان:

$$1\le u_n\le 2 \text{ ، } 1\le v_n\le 2 \text{ ، } u_n\le u_{n+1} \text{ و } v_n\ge u_n$$

ب) هل المتتالية $(u_n)$ متقاربة ؟ برر اجابتك

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

3. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$

4. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

5. استنتج أن المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ لهما نفس النهاية $l$ ، ثم اوجد قيمة مضبوطة للعدد $l$

## التمرين الرابع(7):

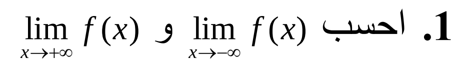
I) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=-4xe^{-2x}+1$

ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(2x+1)e^{-2x}+x+1$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$



1. احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

3. أ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي لـ $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$

4. اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0

5. بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها

6. ارسم كلا من $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$

7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و اشارة حلول المعادلة $(2x+1)e^{-2x}-m+1=0$

8. لتكن $H$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x)=(ax+b)e^{-2x}$

أ) اوجد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون $H$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto(2x+1)e^{-2x}$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي $A$ المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

## تصحيح البكالوريا التجريبية وسلم التنقيط    شعبة الرياضيات    دورة ماي 2016

## الموضوع الأول

### التمرين الاول:

$\vec{u}(1;5;-1)$ ، $D(-2;8;4)$ و $C(5;4;-3)$ ، $B(3;2;-4)$ ، $A(1;4;-5)$

**1.تبيين أن :** $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ ........................(0,5)

**2.** تمثيل وسيطي للمستقيم $(T)$ الذي يشمل النقطة $D$ و يوازي $\vec{u}$ : $\begin{cases} x=t-2 \\ y=5t+8 \\ z=-t+4 \end{cases}$ ...............(0,5)

**3.** $(P): x-y-z-7=0$

أ) بما أن $\overrightarrow{n_{(ABC)}} \nparallel \overrightarrow{n_{(P)}}$ فان $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ تمثيل وسيطي له $\begin{cases} x=2k+11 \\ y=k+4 \\ z=k \end{cases}$ ..... (0,75)

ب) **تبيين** أن $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي: $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه لـ $(T)$ و $\vec{v}(2;1;1)$ شعاع توجيه لـ $(\Delta)$

بما أن $\frac{1}{5} \neq \frac{2}{1}$ فان $(T)$ و $(\Delta)$ غير متوازيان ، ندرس التقاطع بين $(T)$ و $(\Delta)$ فنجده مجموعة خالية ... (0;75)

**4. التحقق من أن :** $E(3;0;-4) \in (\Delta)$ و $F(-3;3;5) \in (T)$ ........................(0,5)

**5.** $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$

أ) **بدلالة** $\alpha$ **معادلة ديكارتية لـ** $(\Gamma)$: لدينا $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$ **و** $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ تكافئ $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$ اذن $(\Gamma)$ مستو شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{EF}$ ...(0,5)

ب) **ايجاد قيمة** $\alpha$ : لتكن $I$ منتصف القطعة $[EF]$ أي $I\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$ ويشمل النقطة $I$ ، بتعويض $I$ في $(\Gamma)$ نجد $\alpha=63$ .... (0,5)

### التمرين الثاني:

**I) 1. الأعداد الحقيقية** $a$، $b$ **و** $c$**:** $P(z)=(z+3)(z^2-2z+2)$ ..................(0,5)

**2. حلول المعادلة** $P(z)=0$ هي $z=-3$ ، $z=1+i$ و $z=1-i$ .................. (0,75)

**II) 1.** أ) **طبيعة التحويل :** العبارة المركبة للتحويل $S$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=1+i$ و $b=i$

لدينا $a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ اذن $S$ هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و لاحقة مركزه هي $z_A=-1=\frac{b}{1-a}$ .......(1)

**ب) الجداء السلمي :** $S(M)=M'$ معناه $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}=\frac{\pi}{4}\right)$ و $AM'=\sqrt{2}AM$

**ومنه** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}\right)=-AM^2+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}$

$=-AM^2+AM.AM'.cos(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})=-AM^2+\sqrt{2}AM.AM.\frac{\sqrt{2}}{2}=-AM^2+AM^2=0$ ........(0,75)

**طبيعة المثلث:** $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}=\frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{MM'}=\frac{\pi}{2}\right)$ اذن $AMM'$ مثلث قائم و مساوي الساقين ..... (0,5)

**2.** أ) **البرهان بالتراجع:** $z_0=(1+i)^0-1=0$

نفرض أن $z_n=(1+i)^n-1$ و نبرهن أن $z_{n+1}=(1+i)^{n+1}-1$

$M_{n+1}=S(M_n)$ معناه $z_{n+1}=(1+i)z_n+i$

و منه $z_{n+1}=(1+i)((1+i)^n-1)+i=(1+i)^{n+1}-1$ ..................... (0,75)

**ب)** $O$ ، $A$ و $M_n$ على استقامية معناه $\left(\overrightarrow{A0};\overrightarrow{AM_n}\right)=k\pi$ أي $arg\left(\frac{z_n-z_A}{-z_A}\right)=k\pi$

ومنه $\arg(z_n-z_A)-\arg(-z_A)=k\pi$ ومنه $arg((1+i)^n)=k\pi$

و منه $\frac{n\pi}{4}=k\pi$ اذن $n=4k$ .................................... (0,75)

## التمرين الثالث:

I) 1. بواقي قسمة $3^n$ على 10: ................................................ (0,75)

| $n$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|---|
| الباقي | 1 | 3 | 9 | 7 |

2. التبيين:

لدينا: $7^{4n+1} \equiv -3[10]$ ، $2021^n \equiv 1[10]$ ، $2019^{2n} \equiv 1[10]$

و منه $7^{4n+1} + 2021^n + 2019^{2n} + 1 \equiv 0[10]$ وبالتالي العدد يقبل القسمة على 10 .............. (0,75)

3. ايجاد مجموعة الاعداد الطبيعية $n$:

$23^{4n+3} + 3n \equiv 0[10]$ تكافئ $n \equiv 1[10]$ ومنه $n = 10k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$ .................... (0,5)

II) 1. حل المعادلة: $y' = (ln\,3)y$ معناه $y = c \times e^{x\,ln3} = c \times 3^x$ حيث $c$ عدد حقيقي .......... (0,25)

2. التبيين: لدينا $f(x) = c \times 3^x$ بما أن $f(0) = 1$ فان $c = 1$ ومنه $f(x) = 3^x$ ................. (0,25)

3. رقم آحاد العدد: $f(1437) + f(2016) = 3^{1437} + 3^{2016}$

لدينا $1437 = 4 \times 359 + 1$ و $2016 = 4 \times 504$ ومنه $f(1437) + f(2016) \equiv 3 + 1[10] \equiv 4[10]$

اذن رقم آحاد العدد $f(1437) + f(2016)$ هو 4 .................................. (0,5)

4. حساب المجموع: $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^n$

$S_n$ عبارة عن مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية اساسها 3 و حدها الاول 1 اذن : $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ .... (0,5)

ايجاد الأعداد الطبيعية $n$:

$2S_n$ يقبل القسمة على 10 معناه $2S_n \equiv 0[10]$ ومنه $3^{n+1} = 1[10]$ ومنه $n = 4k - 1$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$ .... (0,5)

## التمرين الرابع:

I) $g(x) = -x^3 + 1 - 2\ln x$ ................................................ (1,5)

1. تغيرات الدالة $g$: $g'(x) = \frac{-3x^2 - 2}{x} < 0$ ،

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

2. اشارة $g(x)$: $g(1) = 0$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

II) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - x + 2$

1. النهايات: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ ................................ (0,5)

2. التبيين و جدول التغيرات: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ................................ (0,75)

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $1$ | ↘ $-\infty$ |

3. أ) تبيين أن $y = -x + 2$ مقارب مائل عند $+\infty$ ................................ (0,25)

ب) الوضع النسبي: $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

على المجال $]0;1[$ $(C_f)$ تحت $(\Delta)$، على المجال $]1;+\infty[$ $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ .................. (0,5)

ج) معادلة المماس: $(T)$ يوازي $(\Delta)$ معناه $f'(x)=-1$ ومنه نجد $x=\sqrt{e}$

وبالتالي: $(T): y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ ومنه نجد $(T): y=-x+\frac{4e+1}{2e}$ ..................(0,75)

**4.** الرسم: ............................................................(1)

**5.** المناقشة: $f(x)=-x+m$ ..............................................(0,5)

**6.** أ) التحقق من أن: $H(x)=-\frac{1+\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ ..............................(0,5)

ب) مساحة الحيز المستوي:

$S_A=\int_1^{\lambda}[f(x)-(-x+2)]dx=\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^{\lambda}=\frac{\lambda-1-\ln\lambda}{\lambda}$ و $\lim_{\lambda\to+\infty}S_{\lambda}=1$ .............(0,75)

## تصحيح البكالوريا التجريبية وسلم التنقيط شعبة الرياضيات دورة ماي

## الموضوع الثاني

### التمرين الاول:

**1.** معادلة سطح الكرة $(S)$: نصف قطر $(S)$ هو $AB=3$ و مركزها $A$

ومنه $(S):\ (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$ ومنه $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z-5=0$ .....(0,5)

**2.** $\begin{cases}x+2z-3=0\\ y+z-1=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=-2z+3\\ y=-z+1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=-2t+3\\ y=-t+1\\ z=t\end{cases}$

اذن $(\Delta)$ مستقيم يشمل النقطة $B(3;1;0)$ و $\vec{u}(-2;-1;1)$ شعاع توجيه له ..................(0,5)

**3.** معادلة المستوي $(P)$: $(P):\ -2x-y+z+4=0$ .........................(0,25)

**4.** أ) $(P)\cap(\Delta)=\left\{H\left(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$ ...................................(0,5)

ب) $d(A,(\Delta))=AE=\frac{\sqrt{30}}{2}$ ، بما أن $d(A,(\Delta))<AB$ فان $(\Delta)$ يقطع $(S)$ في نقطتين

نعوض $(\Delta)$ في $(S)$ فنجد $t=0$ أو $t=1$ ومنه $(S)\cap(\Delta)=\{B(3;1;0),C(1;0;1)\}$..........(0,75)

**5.** أ) التبيين $G$ مرجح الجملة $\{(B;e^t),(C;1)\}$ معناه $e^t\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه $e^t\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$ ......................(0,5)

ب. جدول تغيرات الدالة $f$ $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$ ، لدينا $f'(t)=\frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$ ..................(0,5)

| $t$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ |
| $f(t)$ | 1 ↘ 0 |

جـ) $\overrightarrow{BG}=f(t)\overrightarrow{BC}$ ، لما يتغير $t$ في $\mathbb{R}$ فان $f(t)\epsilon]0;1[$ و منه مجموعة النقط $G$ لما يتغير $t$ في $\mathbb{R}$ هي القطعة المستقيمة $[BC]$ ماعدا النقطتين $B$ و $C$ ..................................(0,5)

**التمرين الثاني:**

**1.** أ) **العبارة المركبة للتشابه** $S$ هي : $z'=2iz+2-9i$ ، نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ................. (0,75)

**ب) ايجاد** $z_E$ : لدينا $S(E)=O$ و منه نجد $z_E=\frac{9}{2}+i$ ................. (0,25)

**2.** أ) **كتابة العدد عل الشكل الجبري و الأسي:** $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ................. (1)

**ب)التبيين:** $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ معناه أن $\begin{cases}\frac{BD}{BC}=\sqrt{2}\\(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\frac{BC}{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

ومنه $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{BC}{BD}$ ............................... (0,75)

**طبيعة المثلث** $BCD$ **:** بما أن $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\frac{BC}{BD}$ فان المثلث $BCD$ قائم في $C$

ومن جهة لدينا $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{4}$ اذن المثلث $BCD$ قائم و متساوي الساقين................. (0,5)

**ج) اثبات أن النقط** $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي الى نفس دائرة:

بما أن المثلث $BCD$ قائم في $C$ فان النقط $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة التي قطرها $[BD]$

من جهة لدينا: $S(B)=D$ أي $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$ أي أن المثلث $ABD$ قائم في $A$ و منه $A$ تنتمي الى الدائرة التي قطرها $[BD]$ ، و بالتالي النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي الى نفس الدائرة التي قطرها $[BD]$ وهذه الدائرة مركزها النقطة $\omega$ ذات اللاحقة 2 و نصف قطرها هو $\omega D=\sqrt{5}$ ............................ (0,75)

**3.** $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ بحيث : $|2iz+2-9i|=1$

أ) **التحقق أن** $B$ **تنتمي الى** $(\Gamma)$............................................... (0,25)

ب) **تعيين طبيعة** $(\Gamma)$ **وعناصرها المميزة:**

$|2iz+2-9i|=1$ معناه $|z'|=1$ أي $OM'=1$ حيث $z'$ لاحقة $M'$ صورة $M$ بالتشابه $S$

بما أن $S(E)=O$ و نسبة التشابه $S$ هي 2 فان: $OM'=2EM$ ومنه $2EM=1$ أي $EM=\frac{1}{2}$

و بالتالي $(\Gamma)$ هي الدائرة التي مركزها $E$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$................................ (0,75)

**التمرين الثالث:**

**I) 1. اتجاه تغير الدالة** $f$**:** $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه $f$ متزايدة تماما ........................... (0,5)

**2.** $1\le x\le 2$ ومنه $f(1)\le f(x)\le f(2)$ ومنه $1<\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{3}<2$ ................ (0;25)

**II) 1.** أ) **البرهان بالتراجع:** $1\le u_n\le 2$ ، $1\le v_n\le 2$ ، $u_n\le u_{n+1}$ و $v_n\ge u_n$................ (1)

**ب)** المتتالية $(u_n)$ متقاربة لانها متزايدة و محدودة من الأعلي............................................ (0;25)

**2. التبيين:** $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$ ................................ (0,25)

**3. الاستنتاج:** $\frac{1}{u_n+1}\le\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{v_n+1}\le\frac{1}{2}$ و منه $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ ....................... (0,25)

**4. الاثبات:** $v_n-u_n\le\frac{1}{4}(v_{n-1}-u_{n-1})\le\left(\frac{1}{4}\right)^2(v_{n-2}-u_{n-2})\le\cdots\le\left(\frac{1}{4}\right)^n(v_0-u_0)=\left(\frac{1}{4}\right)^n$................. (0,5)

**5. الاستنتاج:** لدينا $0\le v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ أي $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=l$ ........... (0,5)

**حساب النهاية:** بما أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة فان $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n$ ومنه $\frac{2l+1}{l+1}=l$

ومنه $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ او $l=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ( مرفوض ) ........................................ (0,5)

**التمرين4 :**

**I) تغيرات الدالة g و اشارتها** $g(x)=-4xe^{-2x}+1$ لدينا $g'(x)=(8x-4)e^{-2x}$ ..................(1, 5)

| $x$ | $-\infty$ $\frac{1}{2}$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ $0$ $+$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ $\frac{e-2}{e}$ ↗ $1$ |

و بالتالي فان: $g(x)>0$

**II)** $f(x)=(2x+1)e^{-2x}+x+1$

**1. النهايات :** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ..............................(0,5)

2. **تبين أن:** $f'(x)=g(x)$ **وجدول التغيرات**..............................(0,75)

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

3. أ) **تبين أن** $(\Delta): y=x+1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ ..............................(0,25)

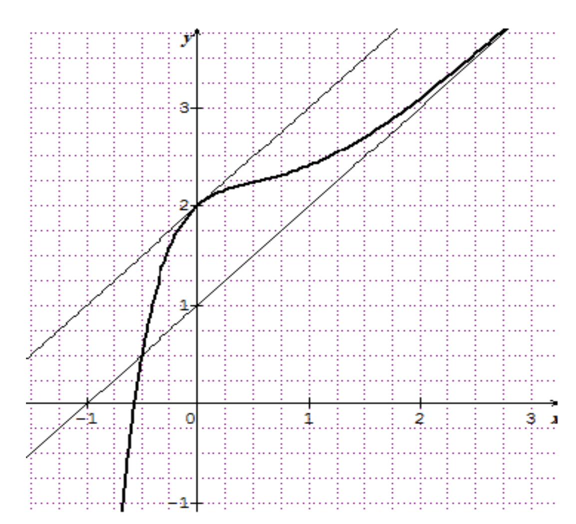
ب) **الوضع النسبي :** $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{2}$

على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ $(C_f)$ تحت $(\Delta)$، على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ ..................(0,5)

4. **معادلة المماس :** $y=x+2$ ..........................................(0,25)

**5. نقطة الانعطاف:** بما أن $f''(x)=g'(x)$ ينعدم عند $\frac{1}{2}$ و يغير اشارته فان النقطة $\left(\frac{1}{2};\frac{4+3e}{2e}\right)$ نقطة انعطاف . . . (0,5)

6. **الرسم:** ..........................................................(1)




7. **المناقشة** $f(x)=x+m$ ..........................................(0,5)

8. أ) الدالة $H(x)=(-x-1)e^{-2x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto(2x+1)e^{-2x}$ .......... ........(0,5)

ب) **مساحة الحيز المستوي:** $S_A=\int_0^1 f(x)dx=\left[(-x-1)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{5e^2-4}{2e^2}$ ..................(0,75)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الاغواط — ثـــانـويات من مدينة الأغواط

امتحان بكالوريا تجريبي — دورة مـــــــاي 2017

الشعبة : الرياضيات — يوم :15 مـــــاي 2017

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 ساعات و نصف

---

## على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التاليّين

## الموضوع الأول

### التمرين الأول(04.5 ن):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(-\sqrt{2};1:0)$ و $B(0;0;-\sqrt{2})$

والمستوي $(P)$ الذي معادلته الديكارتية : $x-y-z+\sqrt{3}=0$

1) أ/ بيّن أن المستقيم $(AB)$ ليس عموديا على المستوي $(P)$

ب/ شكل معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المار بالنقطتين $A$ و $B$ والعمودي على المستوي $(P)$

2) لتكن $(S)$ سطح الكرة التي مركزها O ومماسية للمستوي $(P)$

أ / أكتب معادلة ديكارتية لــ $(S)$

ب / تحقق أنّ المستوي $(Q)$ يمس سطح الكرة $(S)$

ج/ نعتبر $I$ و $J$ نقطتي التماس لــ (S) مع المستويين $(P)$ و $(Q)$ . بيّن بطريقتين مختلفتين أنّ : $IJ=\sqrt{2}$

3) لتكن $(S_m)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق :

$x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$ حيث m وسيط حقيقي .

أ/ بيّن أن $(S_m)$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $I_m$ ونصف قطرها $R_m$

ب / عين مجموعة النقط $I_m$ لمّا $m$ يتغيّر في $\mathbb{R}$

ج/ بيّن أن جميع الكرات $(S_m)$ تمرّ بدائرة ثابتة $(C)$ موجودة في مستو يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$

### التمرين الثاني(03.5 ن):

1) جد جميع الثنائيات المرتبة $(x,y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $x^3-y^3=631$ .

2) أ/ ماهو باقي القسمة الاقليدية للعدد 111 على 7 .

ب/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $10^n$ علـــى 7 .

3) $\propto$ عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كمايلي : $\propto=\overline{999888777666555444333222111}$ .

أ/ بيّن أنّ $\propto$ يكتب بدلالة العدد 111 .

ب/ ماهو باقي قسمة العدد $\propto$ على 7 .

**التمرين الثالث: (05.5 نقاط )**

1) نعتبر كثير الحدود $p(z)$ للمتغير المركب $z$ حيث : $p(z) = z^3 + (2-\mathrm{i})z^2 + (4-2\mathrm{i})z - 4\mathrm{i}$

أ/ أحسب $p(i)$ ثمّ عيّن العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ :

$$p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$$

ب/ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$ ، ثمّ أكتب حلولها على الشكل المثلثي

2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{o};\vec{u};\vec{v})$ . $A$ و $B$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $Z_A = i$ و $Z_B = -1-\sqrt{3}i$ . $S$ التشابه المباشر في المستوي الذي مركزه $O$ والذي يحوّل $A$ إلى $B$ .

أ/ أكتب العبارة المركبة للتشابه $S$ ثم عيّن نسبته وزاويته

ب/ لتكن النقطة $A_n$ ذات اللا حقة $Z_n$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $A_{n+1} = S(A_n)$ ،

نسمي $A_0$ النقطة التي لاحقتها $Z_0 = i$

- ✓ عيّن لاحقتي النقطتين $A_1$ و $A_2$
- ✓ برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $Z_n = 2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$

**ج/ من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $u_n = OA_n$ ، أثبت أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول**

ثم تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ أنّ: $u_n = 2^n$

- ✓ نرمز بـ $T_n$ إلى مجموع أطوال القطع المستقيمة $[A_0O], [A_1O] \dots\dots\dots\dots\dots\dots, [A_nO], [A_{n+1}O]$

أحسب المجموع $T_n$ بدلالة $n$

3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $12x - 5y = 3$ ...................... (1)

أ/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) . لاحظ أنّ الثنائية $(4;9)$ حل للمعادلة (1)

ب/ استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ حيث تكون النقط $A_n$ تنتمي إلى المحور الحقيقي الموجب

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، العدد $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}$ تخيلي صرف، ثم استنتج طبيعة المثلثات $OA_nA_{n+3}$

5) عيّن بدلالة n قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}})$ ، ثمّ استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث تكون النقط $O$، $A_n$ و $A_{2n}$ في استقامية

**التمرين الرابع: (07 نقاط )**

I- باستعمال قابلية اشتقاق الدالة $x \mapsto lnx$ عند1 ، بيّن أنّ : $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ ثمّ استنتج أنّ : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

II – نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـــــ : $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال$[1;+\infty[$ : $f(x)=lnx+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ب/ بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال$[1;+\infty[$ : $x-1=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

ج/ بيّن أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 1 . فسّر النتيجة بيانيا

2) أ/ أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ .

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

ج) أرسم المنحنى $(C_f)$ .

3) ليكن $S$ مساحة الحيز $D$ المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$ ، $A$ و $B$ **نقطتان من** $(C_f)$ **فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3 والنقطتان** $P(1;2ln(1+\sqrt{2}))$ ، $Q(3;0)$ **من المستوي**

أ/ أحسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث $ABQ$

ب/ استنتج أنّ : $2ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq 4ln(1+\sqrt{2})$ . ( لاحـــــظ أنّ : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ )

III - نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـــــــ : $g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ ، $(C_g)$ تمثيلها البياني.

1) بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال$[0;+\infty[$ : $g(x)\geq 1$

2) أ/ ليكن $y$ من $\mathcal{R}_+$ ،حل في $\mathcal{R}_+$ و بدلالة $y$ المعادلة $f(x)=y$ ذات المجهول الحقيقي $x$ ثم استنتج أنّه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من $(C_f)$ فإنّ $M'(y;x)$ نقطة من $(C_g)$

ب/ بين كيف يمكنك رسم المنحني $(C_g)$ انطلاقا من $(C_f)$ ؛ ارسم $(C_g)$ في نفس المعلم السابق و بلون مخالف.

3) ليكن $S'$ مساحة الحيّز $D'$ المحدد بالمنحنى $(C_g)$ والمستقيمات التي معادلاتها :

$$x=0 \text{ ، } x=2ln(1+\sqrt{2}) \text{ و } y=3$$

أ/ بيّن أنّ : $S'=6ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$

ب/ أحسب $\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ، ثمّ استنتج قيمة $S$

## التمرين الأول

**1) أ/ تبيين أن المستقيم $(AB)$ ليس عموديا على المستوي $(P)$**

لدينا : $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2};-1;-\sqrt{2})$ و $\overrightarrow{n_p}(1;-1;-1)$ ، نلاحظ أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_p}=2\sqrt{2}+1\neq 0$ أي أن المستقيم $(AB)$ ليس عموديا على المستوي $(P)$

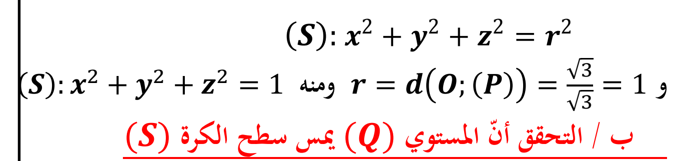
**ب/ ايجاد معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المار بالنقطتين $A$ و $B$ والعمودي على المستوي $(P)$**

ليكن $\overrightarrow{n_Q}(a;b;c)$ شعاع ناظم لـ $(Q)$

لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{n_Q}\perp(AB)\\ \overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_p}\end{cases}$ أي $\begin{cases}\sqrt{2}a-b-\sqrt{2}c=0\\ a-b-c=0\end{cases}$ وبطرح المعادلة الاولى من الثانية نجد $a(\sqrt{2}-1)=c(\sqrt{2}-1)$

أي $a=c$ وعليه تكون $b=0$ إذن $\overrightarrow{n_Q}(1;0;1)$ ومنه معادلة $(Q)$ من الشكل $x+z+d=0$ وبماأن $B\in(Q)$ فإن $d=2$ وعليه تكون $(Q)=x+z+\sqrt{2}=0$

**2) $(S)$ سطح الكرة التي مركزها $O$ ومماسية للمستوي $(P)$ معناه :**



$$(S): x^2+y^2+z^2=r^2$$

و $r=d(O;(P))=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$ ومنه $(S): x^2+y^2+z^2=1$

**ب / التحقق أنّ المستوي $(Q)$ يمس سطح الكرة $(S)$**

لدينا : $d(O;(Q))=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ ومنه المستوي $(Q)$ يمس سطح الكرة $(S)$

**ج/. تبيين أنّ : $IJ=\sqrt{2}$**

ط1 : لدينا: $(P)\perp(Q)$ إذن $(OI)\perp(OJ)$ ومنه المثلث $OIJ$ قائم في $O$

وحسب مبرهنة فيثاغورس : $IJ^2=OI^2+OJ^2=1+1=2$ ومنه $IJ=\sqrt{2}$

**ط2: يمكن ايجاد احداثيات النقطتين $I$ و $J$**

لدينا : $\overrightarrow{OI}\parallel\overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{OJ}\parallel\overrightarrow{n_Q}$ وعليه تكون $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $I(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ومنه $IJ=\sqrt{2}$

**3) أ/ تبيين أن $(S_m)$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $I_m$ ونصف قطرها $R_m$**

لدينا : $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$

أي: $[x-(m+1)^2]+[y+m^2]+[z+(m-1)^2]-(m+1)^2-m^2-(m-1)^2-2m\sqrt{3}=0$

$$[x-(m+1)]^2+[y+m]^2+[z+(m-1)]^2=3m^2+2m\sqrt{3}+2$$

نلاحظ أنّه من أجل $m\in\mathcal{R}$ , $3m^2+2m\sqrt{3}+2>0$ وعليه تكون $(S_m)$ سطح كرة مركزها $I_m(m+1;-m;-m+1)$

ونصف قطرها $R_m=\sqrt{3m^2+2m\sqrt{3}+2}$

**ب / تعيين مجموعة النقط $I_m$ لمّا $m$ يتغيّر في $\mathbb{R}$**

لدينا $I_m(m+1;-m;-m+1)$ أي $\begin{cases}x=1+m\\ y=-m\quad m\in\mathcal{R}\\ z=1-m\end{cases}$ وعليه مجموعة النقط هي مستقيم يشمل النقطة $1;0;1$

و $\vec{v}(1;-1;-1)$ شعاع توجيه له

ج/ بيّن أن جميع الكرات $(S_m)$ تمرّ بدائرة ثابتة $(C)$ موجودة في مستو يطلب تعيين مركزها $H$ ونصف قطرها $r$

أي $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$ $M\in(S_m)$

وهذا يعني أنّ: $x^2+y^2+z^2-2x-2z+m(-2x+2z+2y-2\sqrt{3})=0$

أي: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2z=0\\-2x+2z+2y-2\sqrt{3}=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=(\sqrt{2})^2\\-x+y+z-\sqrt{3}=0\end{cases}$ وهي تقاطع سطح كرة مع المستوي $(P)$

لدينا : $d(w(1;0;1);(P))=1<\sqrt{2}=r'$ ومنه تقاطعهما هي دائرة مركزها $H(1-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};1+\frac{\sqrt{3}}{3})$ حيث

" $H$ هي تقاطع المستقيم المار بالنقطة $w$ والعمودي على $(P)$ " ونصف قطرها $r$ حيث $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$

## التمرين الثاني:

1) ايجاد جميع الثنائيات المرتبة $(x,y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $x^3-y^3=631$ .

بالقسمة الاقليدية للعدد $x^3-y^3$ على $x-y$ نجد : $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$

أي المعادلة السابقة تصبح $(x-y)(x^2+y^2+xy)=631$

بما أنّ 631 عدد أولي أي $631=631\times 1$ فإن : $\begin{cases}x-y=1\\x^2+y^2+xy=631\end{cases}$

لأنّ $x^2+y^2+xy>x-y$ و $x$ ، $y$ طبيعيان

إذن $y=x-1$ بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة نجد : $x^2-x-210=0$ ولدينا $\Delta=841$ أي

$x_1=-14$ ( حل مرفوض ) و $x_1=15$ بالتعويض نجد $y=14$ ومنه توجد ثنائية وحيدة هي حل للمعادلة أي: $s=\{(15;14)\}$

2) أ/ ايجاد باقي القسمة الاقليدية للعدد 111 على 7 . لدينا : $111=15\times 7+6$ ومنه $111\equiv 6[7]$

ب/ تعيين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $10^n$ على 7 .

$10^0\equiv 1[7]$ ،$10^1\equiv 3[7]$ ،$10^2\equiv 2[7]$ ،$10^3\equiv 6[7]$ ،$10^4\equiv 4[7]$ ،$10^5\equiv 5[7]$ ،$10^6\equiv 1[7]$،

ومنه جدول البواقي كمايلي:

| قيم $n$ | 6k | 6k+1 | 6k+2 | 6k+3 | 6k+4 | 6k+5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| البواقي | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 |

3) أ/ كتابة $\propto$ بدلالة العدد 111.

بقسمة العدد $\propto$ على 111 نجد : $\propto=111(9008007006005004003002001)$

ب/ باقي قسمة العدد $\propto$ على 7 . لدينا :

$111(9008007006005004003002001)=111(1.10^0+2.10^3+3.10^6+4.10^9+5.10^{12}+6.10^{15}+7.10^{18}+8.10^{21}+9.10^{24}$

و باستعمال السؤال 2) أ/ و 2) ب/ لدينا : $\propto\equiv 6(1+2\times 6+3\times 1+4\times 6+5\times 1+6\times 6+7\times 1+8\times 6+$
$9\times 1)[7]$

أي : $\propto\equiv 870[7]$ ومنه $\propto\equiv 2[7]$ " لأنّ : $870\equiv 2[7]$ "

## التمرين الثالث:

1) أ/ $p(i)=0$ ، تعيين $a$ و $b$ :

ومنه :

|  | 1 | $2-i$ | $4-2i$ | $-4i$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | 0 | $i$ | $2i$ | $4i$ |
|  | 1 | 2 | 4 | 0 |

$$p(z)=(z-i)(z^2+2z+4)$$

ب/ حل المعادلة $p(z)=0$ أي $z-i=0$ أو $z^2+2z+4=0$

ومنه حلول المعادلة هي: $Z_0=i$ ، $Z_1=-1-\sqrt{3}i$ ، $Z_2=-1+\sqrt{3}i$

- كتابة الحلول على الشكل المثلثي : $Z_0=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$ ، $Z_1=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

$$Z_2=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$$

أ/ كتابة العبارة المركبة للتشابه $S$ ثم تعيين نسبته وزاويته : لدينا التشابه مركزه $O$ أي العبارة المركبة $z'=az$

وبما أنّ : $B=S(A)$ فإنّ : $a=\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{i}=-\sqrt{3}+i$ ومنه $z'=(-\sqrt{3}+i)z$

حيث نسبته هي $|a|$ أي 2 و زاويته هي $arg(a)$ أي $\frac{5\pi}{6}$

ب/ تعيين لاحقي النقطتين $A_1$ و $A_2$ : لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $Z_{n+1}=(-\sqrt{3}+i)Z_n$

$$Z_1=(-\sqrt{3}+i)Z_0=-1-\sqrt{3}i \text{ ، } Z_2=(-\sqrt{3}+i)Z_1=2\sqrt{3}+2i$$

* برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $Z_n=2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$ ...................... $(p_n)$

نستعمل البرهان بالتراجع : – التحقق: من أجل $n=0$ $Z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ .................... محققة

نفرض أنّ : صحيحة $(p_n)$ أي $Z_n=2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$ ونبرهن صحة $(p_{n+1})$ أي

$$Z_{n+1}=2^{n+1}e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6})}$$

لدينا : $Z_{n+1}=(-\sqrt{3}+i)Z_n$ أي $Z_{n+1}=\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$ اي $Z_{n+1}=2^{n+1}e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6})}$

أي $(p_{n+1})$ صحيحة ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $Z_n=2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$

ملاحظـــــة : " بالامكان الاجابة على هذا السؤال باستعمال تركيب التحويلات "

ج/ اثبات أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{OA_{n+1}}{OA_n}=\frac{|(-\sqrt{3}+i)Z_n|}{|Z_n|}=\frac{|-\sqrt{3}+i|.|Z_n|}{|Z_n|}=2$ ومنه $(u_n)$ هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول

$u_0=OA_n=|Z_0|=1$ ، التحقق $u_n=u_0\times q^n=2^n$

✓ حساب المجموع $T_n$ بدلالة $n$ :

$$T_n=u_0+u_1+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+u_{n+1}=1\left(\frac{1-2^{n+2}}{1-2}\right)=2^{n+2}-1$$

3) أ/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $12x-5y=3$

نلاحظ أنّ : $12(4)-5(9)=3$ إذن الثنائية $(4;9)$ حل للمعادلة

$\begin{cases} 12x-5y=3 \\ 12(4)-5(9)=3 \end{cases}$ بالطرح طرفا لطرف نجد $12(x-4)-5(y-9)=0$ أي $12(x-4)=5(y-9)$

باستعمال مبرهنة غوص نجد $\begin{cases} x=5k+4 \\ y=12k+9 \end{cases}$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ب/ استنتاج مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ حيث تكون النقط $A_n$ تنتمي إلى المحور الحقيقي الموجب

معناه $\arg(Z_n)=2k\pi$ أي $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)=2k\pi$ ومنه $5n+3=12k$ فينتج لنا $12k-5n=3$

وحسب السؤال 3) أ/ نجد : $\begin{cases} k=x=5\propto+4 \\ n=y=12\propto+9 \end{cases}$ ومنه $n=12\propto+9$ مع $\propto\in\mathbb{N}$

4) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، العدد $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}$ تخيلي صرف

لدينا : $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}=\frac{2^{n+3}e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+3)\pi}{6})}}{2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}}=\frac{2^n\times2^3e^{i(\frac{5n\pi}{6}+\frac{15\pi}{6}+\frac{\pi}{2})}}{2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}}=8.e^{i\frac{5\pi}{2}}=8.e^{i\frac{\pi}{2}}=8i$

✓ استنتاج طبيعة المثلثات $OA_nA_{n+3}$:

لدينا $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}=8i$ معناه $arg\left(\frac{Z_{n+3}}{Z_n}\right)=\frac{\pi}{2}$ أي $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{n+3}}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلثات $OA_nA_{n+3}$ قائمة في $O$

5) تعيين بدلالة n قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)$

لدينا : $\frac{Z_{2n}}{Z_n}=\frac{2^{2n}e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(2n)\pi}{6})}}{2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}}=2^n.e^{i\frac{5n\pi}{6}}$ ومنه $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)=\arg\left(\frac{Z_{2n}}{Z_n}\right)=\frac{5n\pi}{6}$

✓ استنتاج قيم $n$ حتى تكون النقط $O$، $A_n$ و $A_{2n}$ في استقامية

معناه : $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)=k\pi$ أي $\frac{5n\pi}{6}=k\pi$ أي $5n=6k$ أي $\frac{n}{6}=\frac{k}{5}=\propto$ ومنه $n=6\propto$ مع $\propto\in\mathbb{N}$

---

## التمرين الرابع:

I- * الدالة $x\mapsto lnx$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث : $(lnx)'=\frac{1}{x}$ ومنه $\lim_{x\to1}\frac{\ln x-ln1}{x-1}=\frac{1}{x}=1$ أي: $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

* بوضع $X=x-1$ تصبح $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{X\to0}\frac{\ln(X+1)}{X}=1$

II- 1) أ/ بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[1;+\infty[$ : $f(x)=lnx+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

لدينا : $\ln(x+\sqrt{x^2-1})=\ln(x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=ln\left(x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\right)=lnx+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ومنه : $f(x)=lnx+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$ " ملاحظة : $\sqrt{x^2}=|x|$ ، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ مع $a>0$ و $b>0$ "

ب/ تبيين انّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[1;+\infty[$ : $x-1=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{x}{x}\sqrt{(1-x^2)\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$ وهو المطلوب

ج/ تبيين أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 1

لدينا $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{ln(x)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\frac{1}{x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=+\infty$ ومنه الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 1

التفسير: المنحنى $(C_f)$ يقبل نصف مماس موازي لحور التراتيب عند النقطة التي فاصلتها 1

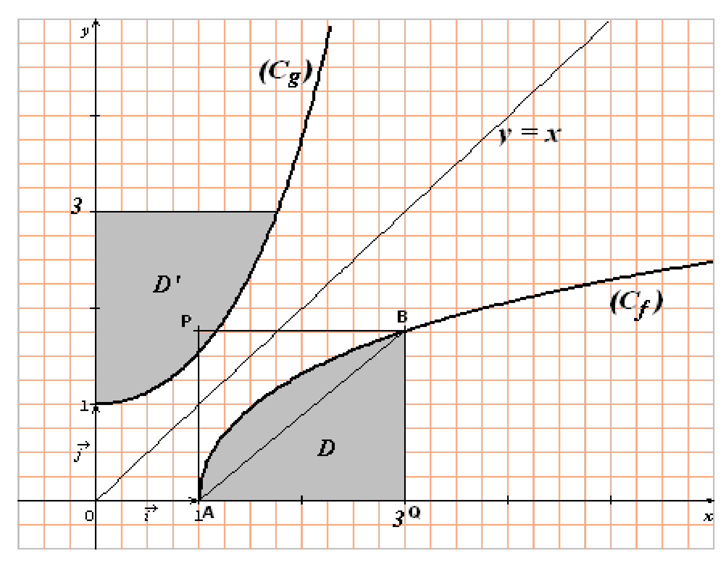
2) أ/ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty$

ب/ $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$

$f$ متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

| $x$ | $1$ $\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\quad +$ |
| $f(x)$ | $0\nearrow+\infty$ |

ج) رسم المنحنى $(C_f)$




3) أ/ حساب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث $ABQ$

النقطة $A$ من $(C_f)$ فاصلتها 1 أي $A(1;0)$، كذلك $B$ من $(C_f)$ فاصلتها 3 أي $B(3;f(3))$ حيث

$$f(3)=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)=2ln(1+\sqrt{2})$$

✓ مساحة المثلث $ABQ$ تساوي : $f(3)\ ua$

✓ مساحة المستطيل $APBQ$ تساوي : $2f(3)\ ua$

ب/ نلاحظ أنّ المساحة $S$ محصورة بين مساحة المثلث $ABQ$ و مساحة المستطيل $APBQ$

إذن : $2ln\left(1+\sqrt{2}\right)\le S\le 4ln(1+\sqrt{2})$

1) تبيين انّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;+\infty[$ : $g(x) \geq 1$

لدينا : $g(x) - 1 = \frac{e^{2x}-2e^x+1}{2e^x} = \frac{(e^{2x}-1)^2}{2e^x} \geq 0$ ومنه $g(x) \geq 1$

2) أ/ ليكن $y$ من $\mathcal{R}_+$، حل في $\mathcal{R}_+$ و بدلالة $y$ المعادلة $f(x) = y$

$f(x) = y$ أي $\ln(x + \sqrt{x^2-1}) = y$ أي $\sqrt{x^2-1} = e^y - x$

بتربيع الطرفين $x^2 - 1 = e^{2y} - 2xe^y + x^2$ ومنه حل المعادلة هو $x = \frac{e^{2y}+1}{2e^y}$

✓ $M(x;y)$ نقطة من $(C_f)$ معناه $f(x) = y$ و بما أنّ $g[f(x)] = x$ فإن : $M'(y;x)$ نقطة من $(C_g)$

ب/ تبيين كيف يمكنك رسم المنحنى $(C_g)$ انطلاقا من $(C_f)$

بما أنّ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ فإنّ المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$ " المنصف الأول"

3) أ/ بيّن أنّ : $S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

$S'$ مساحة الحيّز $D'$ المحدد بالمنحنى $(C_g)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$ ، $x = 2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y = 3$

$$S' = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} [3 - g(x)]dx = [3x]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$$
$$= 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$$

ب/ حساب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

$$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} =$$
$$\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right] = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2\right]$$

ومنه : $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx = 2\sqrt{2}$

✓ استنتاج قيمة $S$ : بما أنّ المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$ فإنّ $D = D'$ ومنه إذن : $S = S'$ :

$$S = S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx = 6\ln(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\ ua$$

**انتهى بحمد الله وبفضله تصحيح الموضوع الأول من البكالوريا التجريبي 2017 مادة الرياضيات للأقسام النهائية شعبة الرياضيات**

**لاتنسونا من صالح دعائكم**

**بالتوفيق والنجاح**




**الأستاذ : تونســــــــــــي ن**